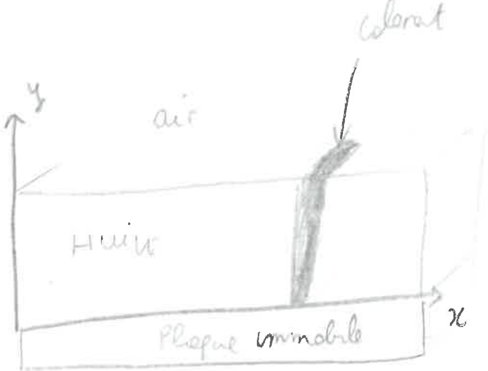
Notion de viscosité

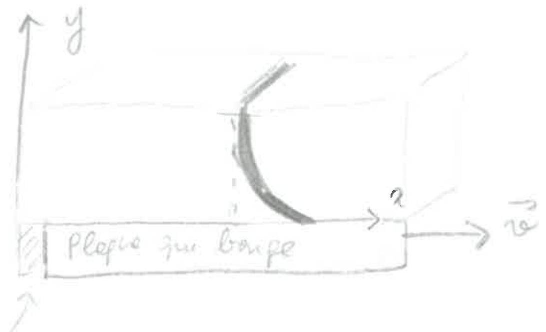
Confusion entre bouteilles et turbulence

Transfert convectif et transfert diffusif de quantité de mouvement

Expérience :

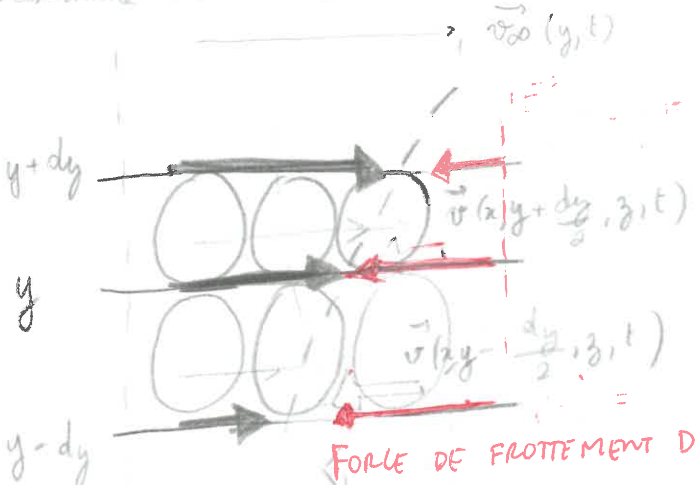


$t = 0$

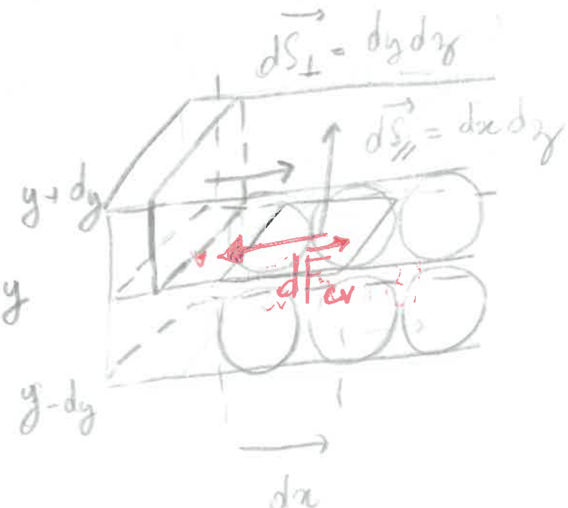


Il doit toujours y avoir la plaque pour supporter l'huile

La continuité des vitesses à l'interface impose que $v(x, 0, t) = 0$



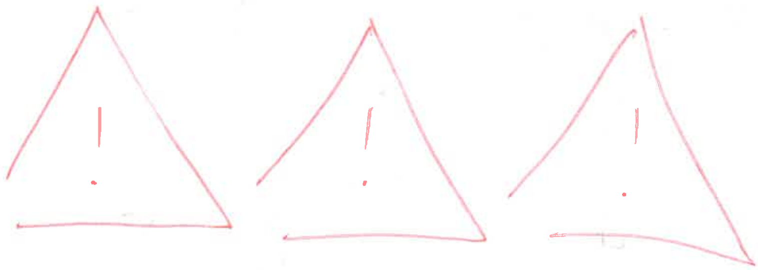
FORCE DE FROTTEMENT DYNAMIQUE APPELÉE FORCE DE VISCOSITÉ DE CISAILLEMENT



Système : $\left\{ \right.$ surface élémentaire dS à une position x, y, z projetée suivant l'axe y normal

Ecoulement non <u>uniforme</u> : gradient de vitesse suivant y

$$\left(\vec{v}(x,y+dy,z,t) - \vec{v}(x,y,z,t)\right) = \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial y}\, dy$$



FORCE SURFACIQUE : $\vec{F} = \iint d\vec{F} \cdot d\vec{S} \Rightarrow d\vec{F} \simeq F \cdot d\vec{S}$

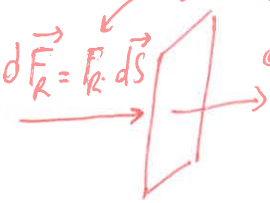
Simplification (non rigoureuse mathématiquement)

À DIFFÉRENTIER ENTRE :

- FORCE SURFACIQUE RADIALE (COMME LA PRESSION)

coefficient comme pour la Pression reliant la force radiale avec la surface, il s'agit de la force radiale par unité de surface

$d\vec{F_R} = F_R \cdot d\vec{S}$

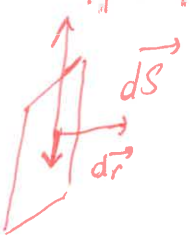


- FORCE SURFACIQUE TANGENTIELLE (COMME LES FROTTEMENTS AUX INTERFACES)

$d\vec{F_T} = F_T \cdot d\vec{r}$

COMME POUR LA FORCE DE TENSION DE SURFACE

NE PEUT PAS ÊTRE DÉCRIT PAR $d\vec{S}$ CAR LE PRODUIT SCALAIRE SERAIT NUL (REND PLUS DIFFICILE LE PASSAGE AU VOLUME !!!)



NE PERMET PAS DE CONCLURE CONVENTIONNELLEMENT ... PASSAGE ...

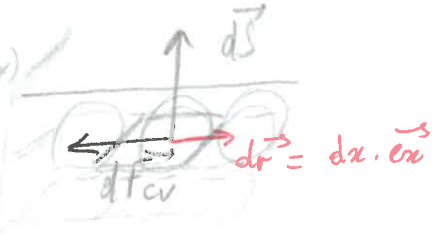
(AUTRE MÉTHODE : CHANGER $d\vec{S}$ POUR SE RAMENER À UNE SURFACE RADIALE À LA FORCE TANGENTIELLE

$d\vec{F_T} = F_T \cdot d\vec{S_2}$)

1ère méthode : UTILISER UNE SURFACE ÉLÉMENTAIRE TANGENTIELLE À LA FORCE DE CISAILLEMENT VISQUEUX)

$$d\vec{F}_{cv}\, dx \propto (+) \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial y}\, dy$$

COMME POUR LA DESCRIPTION DE LA TENSION SUPERFICIELLE

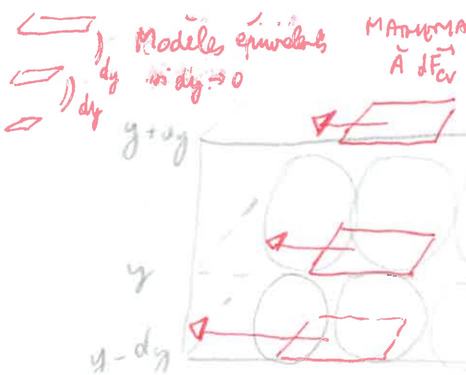


NE FONCTIONNERA PAS PAR PASSAGE À LA DENSITÉ VOLUMIQUE DE FORCE

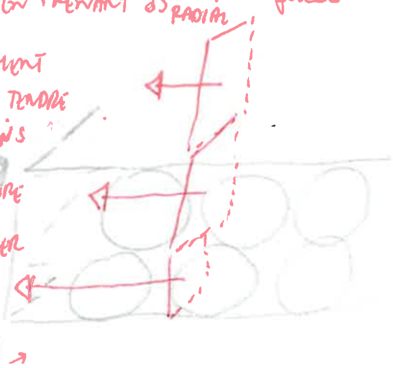
=) PLUS GÉNÉRALEMENT NE FONCTIONNE PAS CAR IL NE S'AGIT PAS D'UNE FORCE SUR UNE SURFACE UNIQUEMENT COMME POUR LA TENSION SUPERFICIELLE

MAIS IL S'AGIT D'UNE FORCE DIFFÉRENTE APPELÉE FORCE DE CISAILLEMENT OÙ TOUS LES MICRO-VOLUMES PROFONDS DE FLUIDE (ET PAS UNIQUEMENT CEUX EN SURFACE) À CHAQUE INTERVALLE y SONT DÉCALÉS) (EN RÉALITÉ LES DEUX DESCRIPTIONS SONT ÉQUIVALENTES SI $dy \to 0$ MAIS LE DÉVELOPPEMENT MATHÉMATIQUE EST PLUS CONVENTIONNEL EN PRENANT $d\vec{S}_{RADIAL}$ À $d\vec{F}_{cv}$)

Décalage de strate de fluide



MODÈLE PAS FORCÉMENT FAUX (EN FAISANT TENDRE $dy \to 0$) MAIS MOINS CONVENTIONNEL À DÉCRIRE MATHÉMATIQUEMENT, À LA PLACE, REMPLACER LE MODÈLE PRÉCÉDENT PAR CELUI-CI

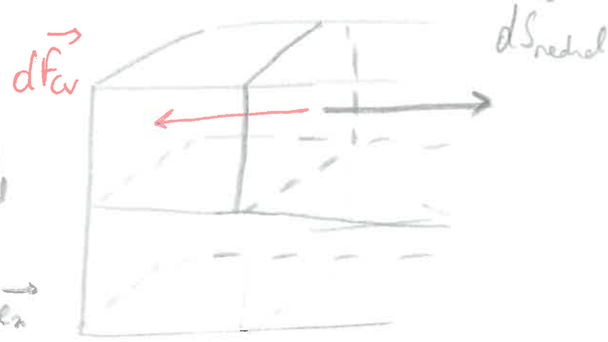


Modèle 2 : en prenant une surface $\vec{dS}$ radiale à $\vec{dF_{cv}}$:

$$\vec{dF_{cv}} = F_{cv} \cdot \vec{dS}_{radial}$$

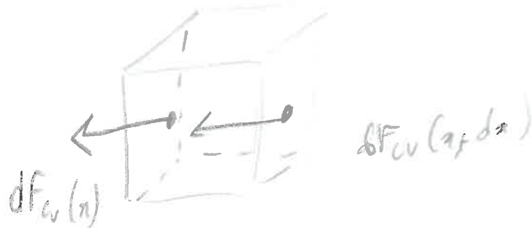
$$\vec{dF_{cv}} \propto + \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial y} \, dy \, \vec{dS}_{radial}$$

$dy \, dz \cdot \vec{e_x}$



NE PERMETTRA PAS DE CONCLURE CONVENTIONNELLEMENT

LORS DU PASSAGE AU VOLUME !!!



$\longrightarrow$ Volume intégré suivant les x alors qu'il n'y a pas de gradient de Force de cisaillement suivant les x !!!

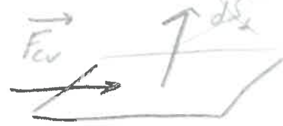
SOLUTION PLUS GÉNÉRALE POUR LES FORCES $\vec{F_p}$ SURFACIQUES : DISTINGUER MATHÉMATIQUEMENT LES FORCES RADIALES ET LES FORCES TANGENTIELLES

F non vectorialisé
$\vec{dS}$ vectorialisé

$dF(x,y,z,t) \simeq$

- forces radiales à $\vec{dS}$: $F_{cv} \cdot \vec{dS_\perp}$
- forces tangentielles à $\vec{dS}$: $\vec{F_{cv}} \cdot dS_{\parallel}$

Sous certaines conditions simplifiées (comme pour la licence)



NE PAS UTILISER CE RÉSULTAT

$\vec{F}$ vectorialisé
dS non vectorialisé

Il s'agit ici d'une force surfacique et tangentielle :

$$\vec{dF_{cv}}(x,y,z,t) \propto + \left(\frac{\vec{v}(x,y+dy,z,t) - \vec{v}(x,y,z,t)}{dy} \right) dx\,dz$$

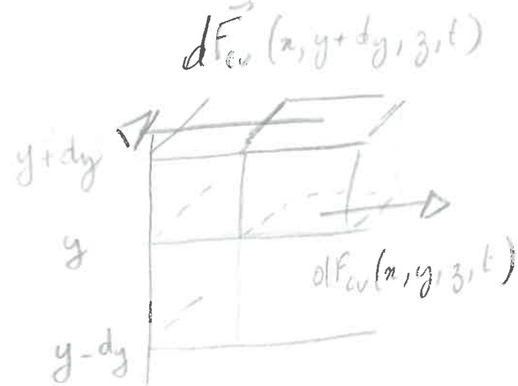
$$\Rightarrow \vec{dF_{cv}}(x,y,z,t) = +\eta \frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial y} dx\,dz$$

OBLIGATOIRE SINON NE PERMET PAS DE CONCLURE !!!

Passage au volume : (pour obtenir une densité volumique de force et ainsi l'intégrer dans l'équation d'Euler, l'équation de Navier Stokes, ...)

$$dF^+ = \vec{dF_{cv}}(x,y+dy,z,t) = +\eta \frac{\partial \vec{v}(x,y+dy,z,t)}{\partial y} dx\,dz\,\vec{e_x}$$

$$dF^- = \vec{dF_{cv}}(x,y,z,t) = +\eta \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial y} dx\,dz\,\vec{e_x}$$



$$\Rightarrow \underbrace{\vec{dF_{cv}}(x,y+dy,z,t) - \vec{dF_{cv}}(x,y,z,t)}_{\vec{dF_t}(x,y,z,t)} = +\eta \times \left(\frac{\partial \vec{v}(x,y+dy,z,t)}{\partial y} - \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial y} \right) dx\,dz\,\vec{e_x}$$

$$\Rightarrow \vec{f_{cv}}(x,y,z,t) = +\eta \frac{\partial \vec{v}(x,y,z,t)}{\partial y^2} \underbrace{(dx\,dy\,dz)}_{d\tau^3} \vec{e_x}$$

GÉNÉRALISATION DANS TOUTES LES BASES : $\vec{f_{cv}}(x,y,z,t) = +\eta \Delta \vec{v}\, d\tau^3$

[Elearning - Physique / Mécanique des fluides "Navier", ça vient d'où 7(1) "

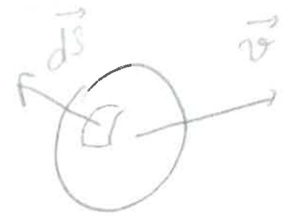
Objet de base : particule de fluide (objet mésoscopique $\delta\tau \simeq 1\,\mu m^3$) qui contient des millions de molécules de fluide

$$\delta m = \rho\, \delta\tau$$ (côté non réduit à infiniment petit microscopique)

Mésoscopique entre l'infiniment petit macroscopique et l'infiniment petit microscopique

$$dm = \rho\, d\tau$$

infiniment petit à l'échelle mésoscopique



Théorème du Centre d'Inertie $\delta m\, \vec{a}(M,t)/_{R} = \sum_k \vec{f}_k$

force de contact (À COURTE DISTANCE)
- perpendiculaire à la surface de la particule (FORCES DE PRESSION)
- tangentielle à la surface de la particule (FORCES DE VISCOSITÉ)

$$\vec{dF} = \underbrace{\vec{dF_\perp}}_{\text{Pression}} + \underbrace{\vec{dF_{//}}}_{\text{Viscosité}}$$

SOUVENT DÉFINIES DE MANIÈRE SURFACIQUE
DÉFINIES SOUS FORME DE CONTRAINTE (FORCE PAR UNITÉ DE SURFACE)

À LONGUE DISTANCE (SOUVENT DÉFINIES DE MANIÈRE VOLUMIQUE)

$$\delta\vec{P} = \delta m\,\vec{g} = \rho\,\delta\tau\,\vec{g} \Rightarrow f_v = \frac{\delta P}{\delta\tau} = \rho\vec{g}$$

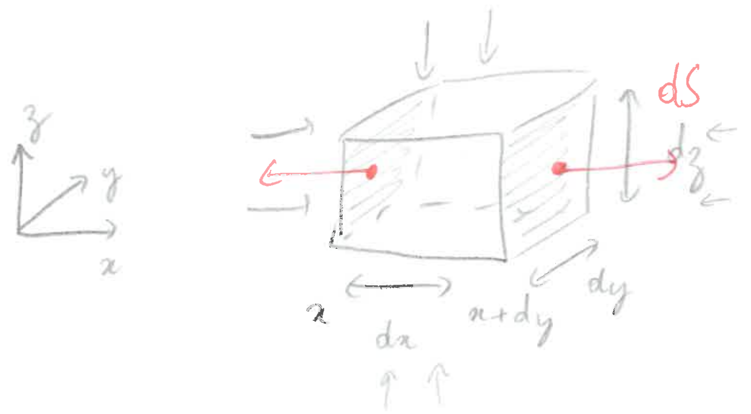
$$\delta\vec{f}_{\text{inertie entraînement}} = -\delta m\,\vec{a_e} = -\rho\,\delta\tau\,\vec{a_e}(M) \Rightarrow \frac{\delta\vec{F_{ie}}}{\delta\tau} = \rho\vec{a_e}$$

$$\delta\vec{f}_{\text{inertie de Coriolis}} = \quad \Rightarrow \frac{\delta\vec{F_{ic}}}{\delta\tau} = -\rho\,\vec{a_{ic}}$$

$$\delta\vec{F}_{\text{Lorentz}} = \delta q\,(\vec{E_{ext}} + \vec{v}\wedge\vec{B_{ext}}) = \rho_{elec}\,\delta\tau\,(\vec{E_{ext}} + \vec{v}\wedge\vec{B_{ext}}) \Rightarrow \frac{\delta\vec{F}_{\text{Lorentz}}}{\delta\tau} = \rho_{elec}(\vec{E_{ext}} + \vec{v}\wedge\vec{B}

Transformer des forces de surface en équivalent volumique des forces

NÉCESSAIRE POUR POUVOIR INCLURE CES FORCES SURFACIQUES DANS UN BILAN DE FORCES VOLUMIQUES



CONVENTION : $\vec{dS}$ ORIENTÉ VERS L'EXTÉRIEUR

$dS = dy\,dz$

$$d\vec{F_p} = -P\,\vec{dS}_{ext}$$

$$dF_{x\,TOT} = d\vec{F_x} + d\vec{F}_{x+dx}$$

$$= +P(x,y,z)\cdot dy\,dz - P(x+dx,y,z)\,dy\,dz$$

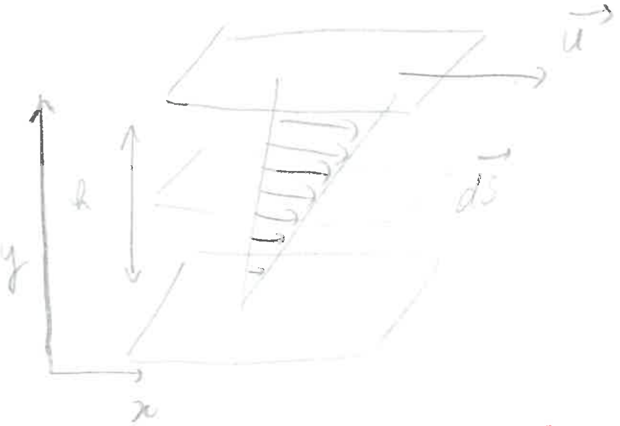
$$= -\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau}$$

$$\frac{dF_{x\,TOT}}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Généralisation sur toutes les forces

$$\frac{dP}{d\tau} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = -\vec{\nabla}(P)$$

Ecoulement de Couette-Plan



adhérence des particules de fluide à la plaque

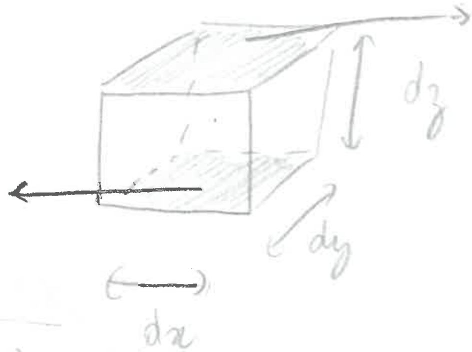
$$\frac{d\vec{F_{cv}}}{dS} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \vec{e_x}$$

viscosité dynamique en Poiseuille (Pl)
← résistance à l'écoulement

$$\vec{v} = v(y) \cdot \vec{e_x}$$
$$= v_x(y) \cdot \vec{e_x}$$

CONTRAINTE = FORCE PAR UNITÉ DE SURFACE
COMME LA VISCOSITÉ, LA PRESSION, ...

$$dF_x(x, y+dy, z) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}(x, y+dy, z)\, dx\, dz$$



$$dF_x(x,y,z) = -\eta \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y}\, dx\, dz$$

$$dF_{x|TOTAL} = \eta\, dx\, dz \left(\frac{\partial v_x(x, y+dy, z)}{\partial y} - \frac{\partial v_x(x,y,z)}{\partial y} \right)$$

$$= \eta \underbrace{dx\, dy\, dz}_{d\tau} \frac{\partial^2 v_x(x,y,z)}{\partial y^2}$$

Force volumique

$$\frac{dF_{x|TOTAL}}{d\tau} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \Delta v_x = \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}_{=0}$$

Rappel :

$$\Delta\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

TOUJOURS BIEN SÉPARER LA DIRECTION D'UN VECTEUR ET SA DÉPENDANCE VIS À VIS DES COORDONNÉES

$$\vec{v} = \underbrace{v(y)}_{\text{dépendance vis à vis des coordonnées}} \cdot \underbrace{\vec{e_x}}_{\text{direction du vecteur}}$$

Généralisation à toutes les coordonnées et à tout système de coordonnées = Généralisation vectorielle

$$\boxed{\frac{d\vec{F_v}}{d\tau} = \eta \Delta\vec{v}}$$

VALABLE POUR UN ÉCOULEMENT INCOMPRESSIBLE !!!

Equation de Navier - Stokes

Referentiel non Galiléen

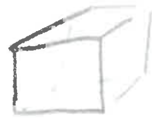
$$\rho\, d\tau \left(\frac{D\vec{v}}{Dt}\right) = \rho\, d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{TERME NON LINÉAIRE}}\right) = \rho\, d\tau\, \vec{g} - d\tau\, \vec{\nabla}(P) + \eta\, d\tau\, \Delta\vec{v} + \rho_{elec}\, d\tau (\vec{E_{ext}} + \vec{v}\wedge\vec{B_{ext}}) \left(- \rho\, d\tau\, \vec{a_c}\right)$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(v^2) + \vec{\nabla}\wedge\vec{v}\wedge\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}(P) + \underbrace{\eta\Delta\vec{v}}_{\text{VALABLE UNIQUEMENT POUR UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE}}$$

Equation d'Euler et de Navier Stokes

Le principe fondamental de la dynamique appliqué dans un volume de fluide élémentaire dV étudié dans un Référentiel Galiléen

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{D(\rho\vec{v})}{Dt} = \sum \vec{f_{ext}}$$



L'UTILISATION DE LA DÉRIVÉE PARTICULAIRE EST ICI OBLIGATOIRE CAR LE COMPORTEMENT DU VOLUME ÉLÉMENTAIRE DE FLUIDE dV N'EST PAS LE MÊME EN TOUT POINT DE L'ESPACE !!!

$dV(x,y,z)$

=> IL FAUT DONC AUSSI DÉRIVER PAR RAPPORT AUX VARIABLES SPATIALES

=> PLUS GÉNÉRALEMENT L'UTILISATION DE MICRO-VOLUME (≡ FORME LOCALE) (≡ ÉQUATIONS MICROSCOPIQUES) NÉCESSITE L'UTILISATION DE LA DIFFÉRENTIELLE TOTALE (DANS LE TEMPS ET DANS L'ESPACE !!!) (SURTOUT LORSQU'ON ÉTUDIE UN PORTION DE SYSTÈME

$$\frac{D(\rho\vec{v})}{Dt} = \sum \vec{f_{ext}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{D(\rho)}{Dt}}_{=0}\vec{v} + \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum \vec{f_{ext}}$$

$= 0$ (Système fermé, système incompressible ($\rho =$ constante), …)

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \sum \vec{f_{ext}}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \underbrace{\vec{\nabla}\wedge\vec{v}}_{=2\vec{\omega}}\wedge\vec{v}\right) = \sum \vec{f_{ext}}$$

$2\vec{\omega}$ ← vecteur tourbillon (rotation de la vitesse sur elle-même)

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right) = \sum \vec{f_{ext}}$$

= Densités volumiques de forces liées aux champs (on supposera uniquement le poids et un champ de Pression sur aux molécules environnantes)

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right) = \sum \vec{f}_{ext}^{\,\text{conservatives}} + \sum \vec{f}_{ext}^{\,\text{non conservatives}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(\rho g h) - \vec{\nabla}(\text{Pression}) + \sum \vec{f}_{ext}^{\,\text{non conservatives}}}$$

La Pression sera supposée comme un champ de force dans ce modèle

(Équation d'Euler)

Équation de Navier - Stokes prise en compte des phénomènes dissipatifs d'énergie

En reprenant l'équation d'Euler. (QUI NE MODÉLISE PAS LA FRICTION DES FLUIDES AUX VITESSES FAIBLES)

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \sum \vec{f_{ext}}$$

et en rajoutant le terme associé aux forces de cisaillement visqueux :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla}(P_{ression}) - \vec{\nabla}(\rho g h) + \eta \Delta \vec{v}$$

Définition de la densité volumique de quantité de mouvement.

$$\vec{p} = \rho \vec{v}$$

(transport de quantité de mouvement par déplacement du fluide) on supposant que le fluide est incompressible

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(\rho \vec{v}) = \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

Définition du flux

$$\vec{j}_{qdm} = \rho \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{j}_{conduction} + \vec{j}_{convectif} + \vec{j}_{rayonnement}$$

$(\equiv \vec{j}_{onde}\ ???)$

$= \vec{0}$ (supposé nul)

$$= \vec{j}_{diffusion} = - \vec{\nabla}(P) \cdot \vec{v} + \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}$$

(transport de quantité de mouvement sans déplacement des molécules (par vibration, ...) dans les fluides, similaire mais plus général que la conduction (valable que dans un fluide alors que la diffusion est valable dans tout milieu continu)

Comme $\vec{j}_{conduction} \ll \vec{j}_{diffusion} + \vec{j}_{convection}$

$$\Rightarrow \vec{j}_{total} \simeq \vec{j}_{diffusion} + \vec{j}_{convection}$$

L longueur caractéristique de l'écoulement

PENSER EN TERMES VISCOSITÉ ≡ DISTANCE PAR RAPPORT À L'INTERFACE

$$\Rightarrow \vec{j}_{total} \simeq - \vec{\nabla}(P) \vec{v} + \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{v}$$

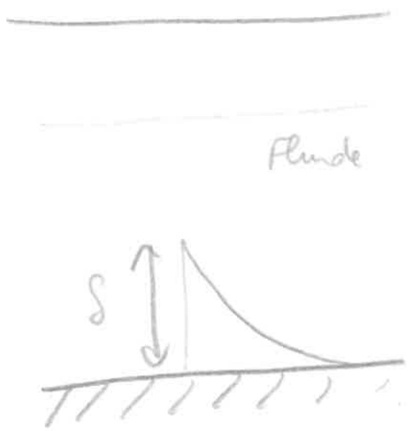
Le nombre de Reynolds est défini comme le rapport entre le flux convectif par rapport au flux diffusif (en valeur absolue)

Dimension caractéristique de l'écoulement (section d'un tuyau, ...)

$$Re = \frac{\| \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \|}{\| \eta \Delta \vec{v} \|} \sim \frac{\rho\, v^2 / L}{\eta\, v / L^2} = \frac{\rho}{\eta} v L$$

Notion de couche - limite :

La force de cisaillement dépendant de la différence de vitesse avec l'interface, elle diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'interface, donc elle n'est véritablement valable que sur une couche limite



couche limite dans la couche limite le terme diffusif domine le terme convectif

- Dans la couche limite

$$Re(\delta) \ll 1$$

et le terme diffusif s'écrit

$$\|\eta \Delta \vec{v}\| \simeq \eta \frac{v}{\delta^2}$$

$$Re|_{local} = \frac{\rho \frac{v^2}{\delta}}{\eta \frac{v}{\delta^2}} = \frac{\rho}{\eta} \delta v$$

dans la couche limite

- Au voisinage de la couche limite ($Re \simeq 1$)

convection en dehors de la couche limite

$$Re_{local} = \frac{\rho \frac{v^2}{L}}{\eta \frac{v}{\delta^2}} = \frac{\rho}{\eta} v \frac{\delta^2}{L}$$

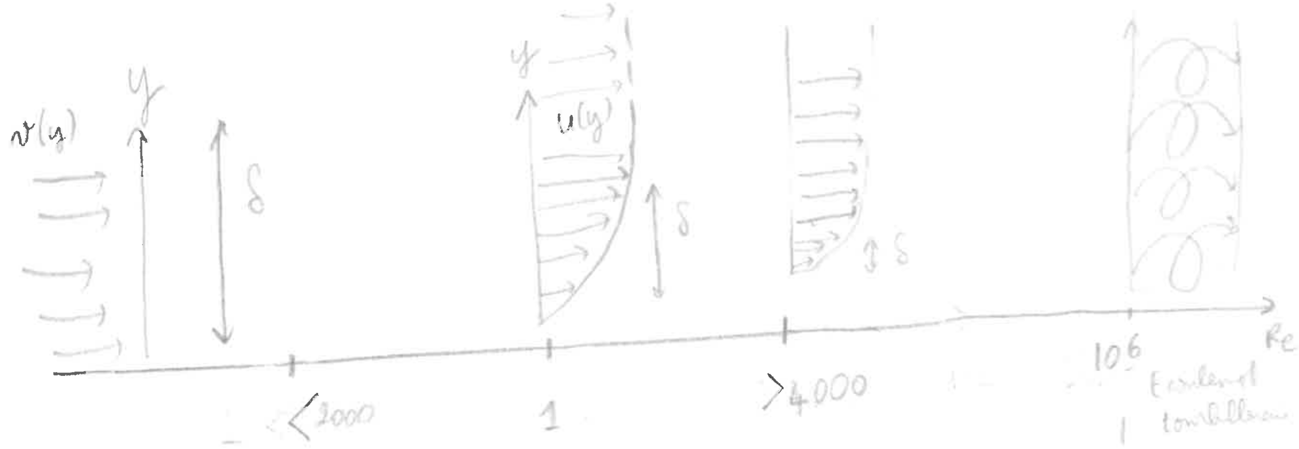
$\simeq 1$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \frac{L}{v}}$$

diffusion uniquement dans la couche limite

- loin de la couche limite $Re \gg 1$

$$Re|_{global} = \rho \frac{v^2}{L} \quad = \frac{\rho}{\eta} v L = \sqrt{Re|_{local}}$$



Ecoulement laminaire

Ecoulement instable (de transition)

Ecoulement turbulent (et non pas tourbillonnaire donné par le terme $\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$)

$\|\vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v}\| \gg \|\frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2)\|$

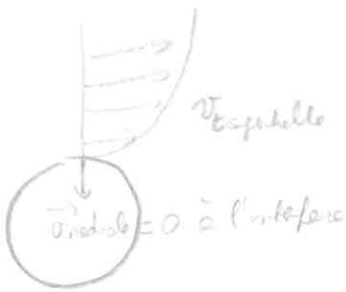
les tourbillons permettent une élimination plus rapide de l'énergie du fluide

Force de portance et force de traînée

D'après la 3ème loi de Newton (principe d'action réaction), le fluide exerce sur un solide immergé, une action de contact réciproque à l'action qu'exerce le solide sur le fluide

→ le solide dans le fluide est responsable de la perte de vitesse radiale au solide du fluide ($\equiv$ continuité des vitesses à l'interface avec le solide)

⇒ il en résulte que la force principale générée par un solide dans un fluide est la densité volumique des forces de cisaillement



$$\Rightarrow \vec{F}_{solide/fluide} = \underbrace{\iiint}_{\text{Volume considéré}} + \eta \, \Delta \vec{v} \; d\tau^3$$

Théorème de Green Ostrogradski

$$\parallel$$

$$\underbrace{\oiint}_{\text{Surface extérieure du solide}} + \eta \, \vec{\nabla} . \vec{v} \; d\vec{S}$$

AINSI RÉCIPROQUEMENT EN APPLIQUANT LA TROISIÈME LOI DE NEWTON

$$\vec{F}_{solide/fluide} = + \vec{F}_{fluide/solide}$$

$$\Rightarrow F_{fluide/solide} = - \oiint \eta \, \vec{\nabla} . \vec{v} . \vec{dS}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{fluide/solide} = -\oiint_{\text{Surface externe}} \eta \, \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}}_{\text{Scalaire}} \, d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{fluide/solide} = -\oiint_{\text{Surface externe}} \eta \, \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{v}_{\text{radiale à l'écoulement}} + \vec{v}_{\text{parallèle à l'écoulement}}\right) d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{fluide/solide} = \underbrace{-\oiint_{\text{Surface externe}} \eta \, \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\perp} \, d\vec{S}}_{\text{FORCE DE TRAINÉE}} + \underbrace{\oiint \eta \, \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\parallel} \, d\vec{S}}_{\text{FORCE DE PORTANCE}}$$

Le profil de la vitesse du fluide $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{total}$ est donné par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(\text{Pression}) - \vec{\nabla}(\rho g h) + \eta \Delta \vec{v} + \sum \vec{f}_{autres}$$

L'équation de Navier Stokes ne peut pas être résolue analytiquement dans la plupart des cas, les forces de trainées et de portances sont obtenues dans des cas simplifiés ou empiriquement

Analyse des dimensions pour l'obtention des forces de trainées et des forces de portance (et de la force de Stokes (= force de trainée dans un écoulement stationnaire et laminaire)

les forces de trainées et de portance ne peuvent dépendre que de

η (viscosité dynamique)

l (taille de l'objet)

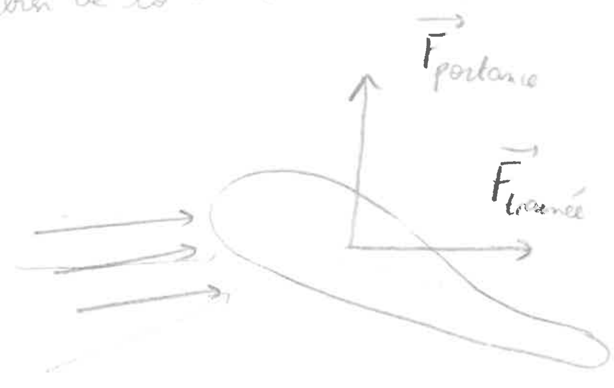
v (vitesse du fluide)

Par analyse des dimensions

$$[\eta] = \frac{kg}{m.s} \quad , [l] = m \quad , [v] = \frac{m}{s}$$

$\Rightarrow [\eta l v] = kg \; m.s^{-2}$ il s'agit bien de la dimension d'une force

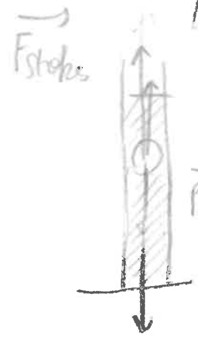
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{trainée} = C_t \eta l v . \vec{u_v} \\ F_{portance} = C_p \eta l v \; \vec{u}_{\perp \text{ à } \vec{u_v}} \end{cases}$$



En prenant $C_t = 6\pi$, la force de Stokes est obtenue pour une bille dans un fluide visqueux

$$\vec{F}_{Stokes} = -6\pi \eta r \vec{v}$$

EXPÉRIENCE À FAIRE !!!



Système = {bille} étudiée dans le Référentiel Terrestre supposé Galiléen

$$[Re] = \left[\frac{\rho}{\eta} v L \right] = \frac{m.s}{m.kg} \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} . m$$ Nombre sans dimension !!!

Comportement peu réaliste hors régime laminaire ($Re > 1$), il faut alors considérer un cas plus général :

À partir de l'équation de Navier Stokes

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} \right) = -\vec{\nabla}(P) - \eta \Delta \vec{v}$$

En régime stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \rho(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(P) + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\Rightarrow \eta \Delta \vec{v} = +\vec{\nabla}(P) + \rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\Rightarrow \eta \Delta \vec{v} = +\vec{\nabla}(P) + \rho\left(\frac{1}{2}\vec{\nabla}(v^2) + \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \wedge \vec{v} \right)$$

$$\Rightarrow \eta \Delta \vec{v} = +\vec{\nabla}(P) + \frac{\rho}{2} \vec{\nabla}(v^2)$$ Régime tourbillonnaire non encore atteint

$$\Rightarrow \eta \iiint \Delta \vec{v}\, dV = +\iiint \vec{\nabla}(P)\, dV + \frac{\rho}{2} \iiint \vec{\nabla}(v^2)\, dV$$

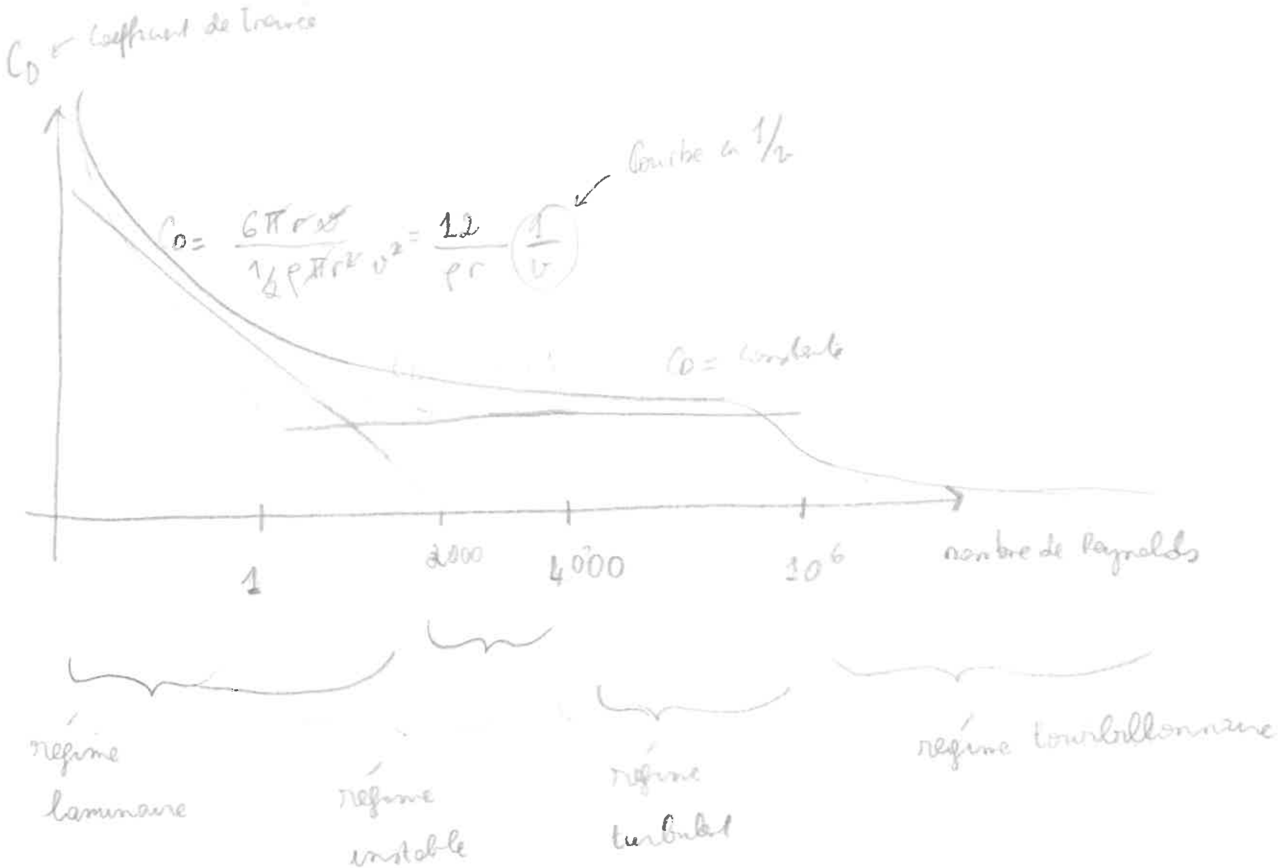
$$\Rightarrow \eta \underset{S_{externe}}{\oiint} \vec{\nabla}.\vec{v}\, d\vec{S} = + \underset{S_{externe}}{\oiint} P.\, d\vec{S} + \frac{\rho}{2} \oiint v^2\, d\vec{S}_{externe}$$

D'après le théorème de Green-Ostrogradski

TERME NÉGLIGEABLE

$$\Rightarrow \eta \underset{S_{externe}}{\oiint} \vec{\nabla}.\vec{v}\, d\vec{S} = + \underset{S_{externe}}{\oiint} -P\, d\vec{S} + \frac{\rho}{2} \oiint v_\perp^2\, d\vec{S} + \frac{\rho}{2} \oiint v_{//}^2\, d\vec{S} + \underbrace{\rho \oiint \vec{v}_{//} . \vec{v}_\perp\, d\vec{S}}_{= \vec{0}}$$

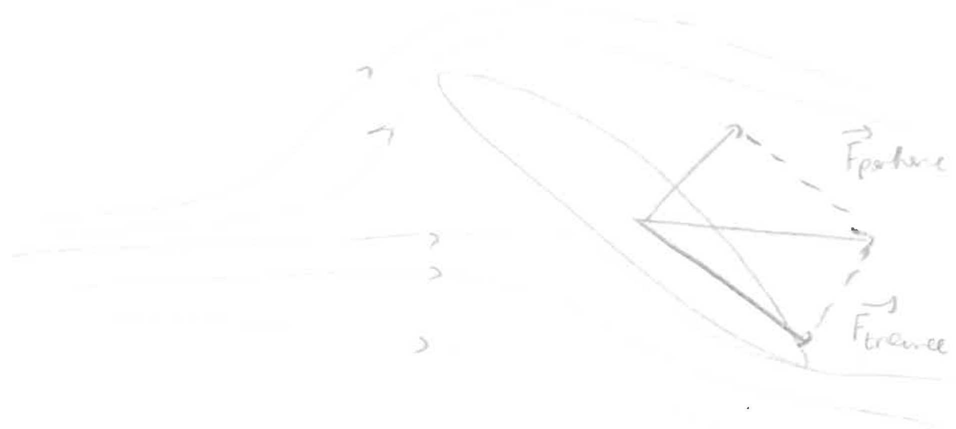
$$\Rightarrow -\left(\vec{F}_{TRAINÉE} + \vec{F}_{PORTANCE} \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ C_{drag}\,(\equiv C_{trainée})}}{C_D} \frac{1}{2} \rho v^2 S + \underset{\substack{\uparrow \\ C_{lift}\,(\equiv C_{portance})}}{C_L} \frac{1}{2} \rho v^2 S$$


C_D = Coefficient de Traînée
$C_D = \frac{6\pi r \eta v}{1/2 \rho \pi r^2 v^2} = \frac{12}{\rho r} \frac{\eta}{v}$
Courbe en 1/x
C_D = constante
1
2000
4000
10^6
nombre de Reynolds
régime laminaire
régime instable
régime turbulent
régime tourbillonnaire

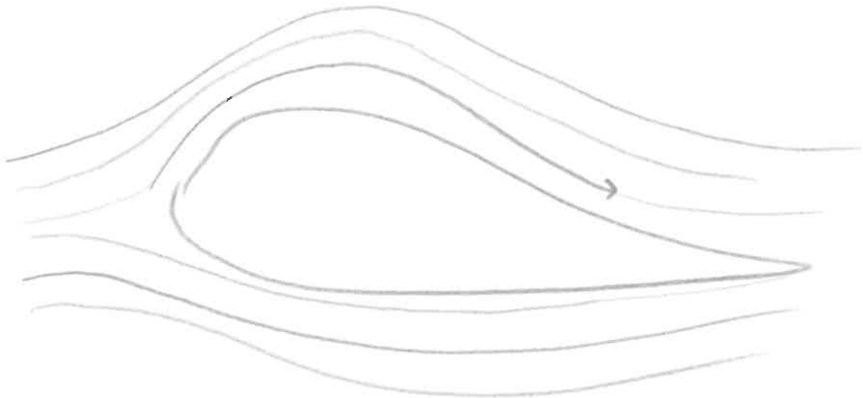
Comment les avions volent

1) Ailes symétriques

il faut un angle par rapport à la direction d'écoulement d'un fluide pour créer de la portance



2) Ailes dissymétriques



Comment créer de la portance par une aile dissymétrique

$$v_{fluide}\big|_{\text{haut de l'aile}} > v_{fluide}\big|_{\text{bas de l'aile}}$$

Pourquoi augmenter la taille du chemin du haut de l'aile par rapport à celui du bas de l'aile (CONTRE-INTUITIF CAR IL S'AGIT D'UNE AUGMENTATION DU CHEMIN À PARCOURIR PAR LE FLUIDE)

<u>Solution</u> : davantage d'angle en haut, on augmente la force centrifuge des molécules d'air passant par le haut de l'aile !!!

⚠ ⚠ ⚠ POUR UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES COMME LA VITESSE :

- VITESSE STATIONNAIRE ≡ VITESSE CONSTANTE DANS LE TEMPS MAIS PAS FORCEMENT DANS L'ESPACE !!!

$$\vec{v}(x,y,z,t) = \vec{v}(x,y,z) \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

- VITESSE UNIFORME ≡ VITESSE CONSTANTE DANS L'ESPACE MAIS PAS FORCEMENT DANS LE TEMPS :

$$\vec{v}(x,y,z,t) = \vec{v}(t) \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}$$

$$\neq \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \neq \vec{v} \cdot \nabla \text{ !..}$$

Fluide incompressible $\rho = $ cste $(d\rho = 0)$

Ecoulement incompressible $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

⚠ ⚠ ⚠

$\Rightarrow$ Si $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (fluide incompressible), le terme convectif $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ n'est pas nul !!!

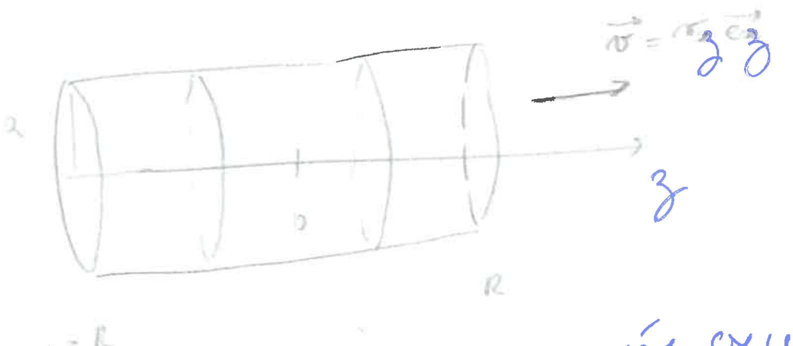
⚠ ⚠ ⚠ IL S'AGIT PAS ~~D'UNE VITESSE UNIFORME~~ UNIFORME $u(x,y,z) = u$???

(≡ vitesse constante dans l'espace)

VITESSE CONSTANTE ≡ VITESSE CONSTANTE DANS LE TEMPS ET DANS L'ESPACE !!!

≡ VITESSE STATIONNAIRE ⊕ UNIFORME !!!

Loi de Poiseuille : Conduite cylindrique traversée par un écoulement de débit D_m



⚠ ⚠ ⚠ ON SE PLACE EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES !!!

Hypothèse P ne dépend que de z : P_z

$\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ (écoulement incompressible)

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial r}.\vec{e_r} + r\frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta}.\vec{e_\theta} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}.\vec{e_z} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + r\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{v} = 0$$

ÉCOULEMENT INCOMPRESSIBLE

$\vec{v} = v.\vec{e_z}$ uniquement !!!

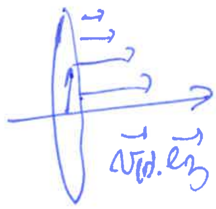
et $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ $r\frac{\partial v_z}{\partial \theta} = 0$

(QUAND z CHANGE, LA VITESSE NE CHANGE PAS)

=> v ne dépend pas de z ni de θ mais que de r !!!

$\vec{v} = v_z(\cancel{z}, r, \cancel{\theta}, t)\ \vec{e_z}$

$\vec{v} = v(r).\vec{e_z} = v_z(r).\vec{e_z}$

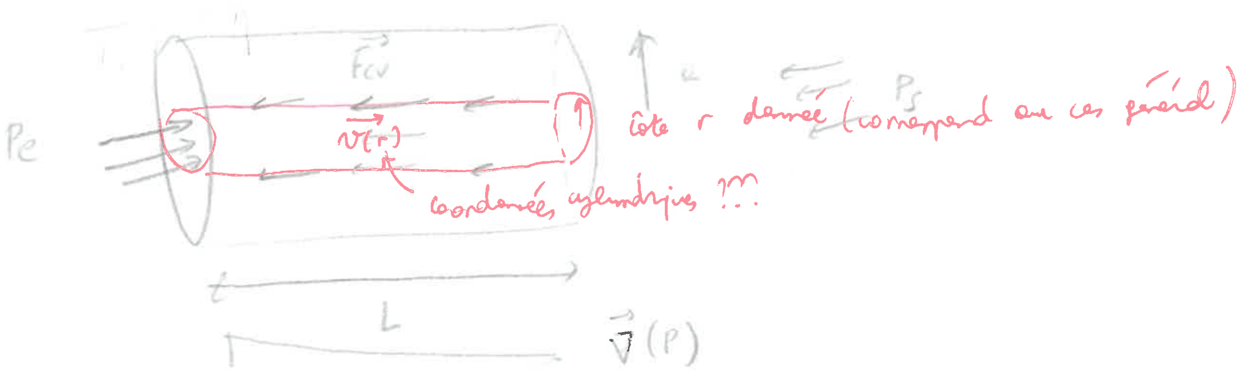


Hypothèse :

Fluide visqueux et incompressible

Écoulement unidirectionnel, laminaire et stationnaire

Cylindre de révolution soumis à un gradient de Pression uniforme



Bilan de forces suivant $\vec{e_x}$ (BILAN MACROSCOPIQUE)

$$P_e \pi r^2 - P_s \pi r^2 + \left(\eta \frac{\partial v}{\partial r} 2\pi r L\right) = m_f \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Contrainte visqueuse (force sur une surface)

$$= m_f \left(\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\vec{0}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}}_{\vec{0}\,???} \right)$$

$\vec{0}$ en régime stationnaire

Ecoulement laminaire, pleinement développé

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v_r \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} + r v_\theta \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0$$

$\underline{\underline{\vec{v} = v(r)\cdot\vec{e_x}}}$!!! (Ecoulement pleinement développé)

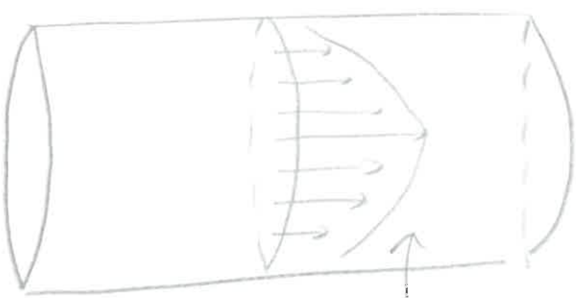
$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{(P_e - P_s)}{2\eta L} r$$

$$\Rightarrow v(r) = -\frac{(P_e - P_s)}{4\eta L} r^2 + A$$

Conditions aux limites : condition d'adhérence aux parois (le fluide colle aux parois)

$$\vec{v}(r=a) = 0 \Rightarrow A = \frac{(P_e - P_s)}{4\eta L} a^2$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{P_e - P_s}{4\eta L}(a^2 - r^2)$$



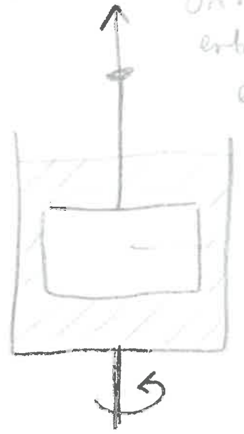
Profil parabolique de la vitesse en r

D'après [Youtube (PC Samy Benhabbour CPGE Louis Thuillier Amiens / Loi de Poiseuille - Etablissement du profil de vitesse]

Écoulement de Couette :

D'après [fonto-physique.fr / fluide visqueux]

On mesure le couple de torsion du cylindre dans le fluide entraîné par un récipient externe contenant le cylindre et le fluide qui tourne



$$\overrightarrow{dF}_{\text{surfacique}_{\text{tangentielle}}} = \vec{\sigma} \cdot dS$$

contrainte (force par une surface) tangentielle $(-\eta \Delta \vec{v})$

alors que pour une force surfacique radiale comme la pression :

$$\overrightarrow{dF}_{\text{surfacique}_{\text{radiale}}} = \sigma \cdot \overrightarrow{dS}$$

contrainte radiale (P, ...)

$$\sigma = \frac{C\theta}{S_{\text{latérale}}} = \frac{C\theta}{2\pi L R_1^2}$$

De plus le moteur entraîne le cylindre externe avec une vitesse de rotation $\dot{\omega}$ telle que

$$v_{\text{cylindre externe}} = R_2 \dot{\omega}$$

$$v_{\text{cisaillement}} = \frac{\Delta v_{\text{cylindre extérieur}}}{\Delta R} = \frac{R_2 \dot{\omega}}{R_2 - R_1}$$

Le rhéomètre mesure θ et $\dot{\omega}$ et permet d'en déduire σ et $v_{\text{cisaillement}}$

Fluide Newtonien : η = constante

Fluide non Newtonien $\eta = f\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

vitesse de cisaillement