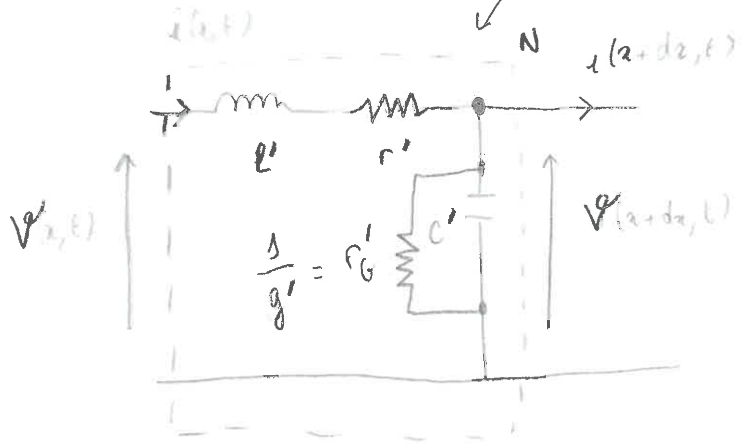
Propagation guidée

1) Propagation dans un câble coaxial

Système = { partie de longueur dx du câble }

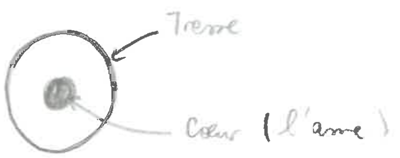


l' : inductance linéique

r' : résistance linéique (perte inductive)

c' : capacitance linéique

r_G' : résistance linéique (perte capacitive)



L'APPROXIMATION À DES ÉTATS QUASI-STATIONNAIRES (AEQS) NE S'APPLIQUE PAS POUR UN CÂBLE COAXIAL CAR :

- LES DIMENSIONS DU SYSTÈME SONT PETITES DEVANT LA LONGUEUR D'ONDE
- LES EFFETS DE PROPAGATION SONT QUASI-NÉGLIGEABLES

D'APRÈS LA LOI DE MAXWELL AMPÈRE :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j_c} + \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

TERME NON NÉGLIGEABLE EN HAUTES FRÉQUENCES (Δt DEVIENT TRÈS PETIT)

=) PAS DE PROPAGATION INSTANTANÉE :

$$V(t) \rightarrow V(x,t)$$

$$i(t) \rightarrow i(x,t)$$

Valeur de C' :

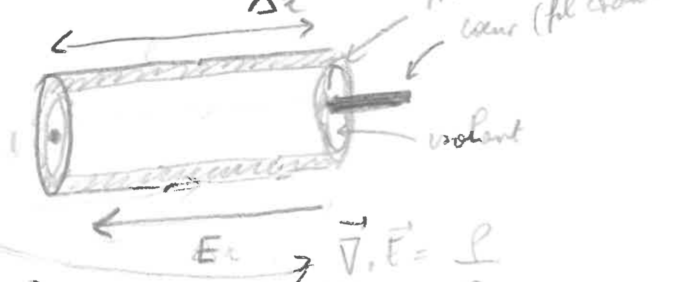
$$E(r) = \frac{q}{\pi \varepsilon a^2} \longrightarrow V_{N-1/N} = -\int_x^{x+\Delta x} E(\vec{l})\,\vec{dl} = \frac{q}{\pi \varepsilon a^2}\,\Delta x$$

ON N'EST PAS DANS LE VIDE !!

EST-CE VALABLE DANS UN CYLINDRE

$$\Rightarrow C' = \frac{q}{V} = \frac{\pi \varepsilon a^2}{\Delta x}$$

$$\simeq \frac{\pi \varepsilon\, r_{isolant}^2}{\Delta x} \quad (\text{si } r_{coeur} \ll r_{isolant})$$



$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon}\,dV$$

(formule de Green-Ostrogradski)

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$\iint \vec{E}\cdot\vec{r}\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} E\,r\,dr\,d\theta$$

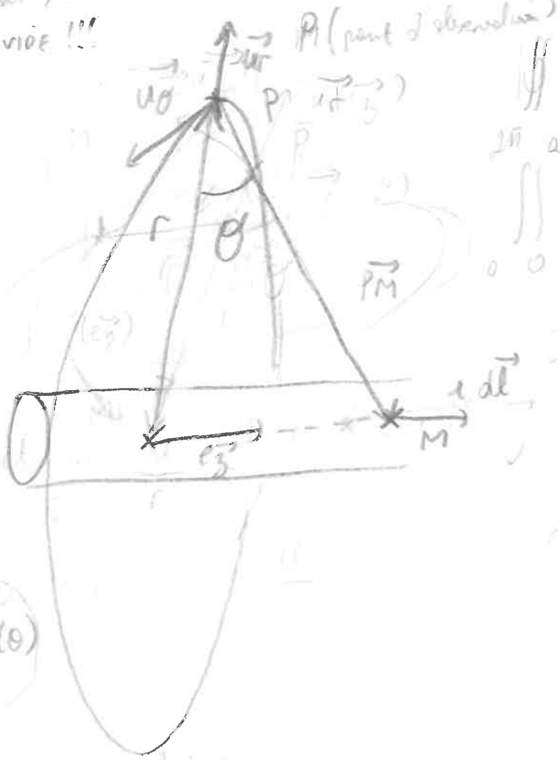
$$\frac{2\pi a^2}{2}$$

Valeur de L' : (formule de Biot et Savart) :

ON N'EST PAS DANS LE VIDE !!!

$$\vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{\vec{PM}\wedge i\vec{dl}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

(Sphère d'influence)



1ère étape : exprimer toutes les longueurs en fonction de θ

$$PM = \frac{r}{\cos\theta}$$

$$l = r\tan\theta$$

$$\Rightarrow dl = r\,\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} + dr\tan(\theta)$$

Dans un premier temps

$$\Rightarrow \vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{i\cos(\theta)\,d\theta}{r}\,\vec{u_\theta}$$

on suppose que le point d'observation ne bouge pas pour le calcul de B

$$\Rightarrow \vec{B} = \int \vec{dB} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{i\cos(\theta)\,d\theta}{r}\,u_\theta$$

POUR UN FIL DE LONGUEUR INFINIE

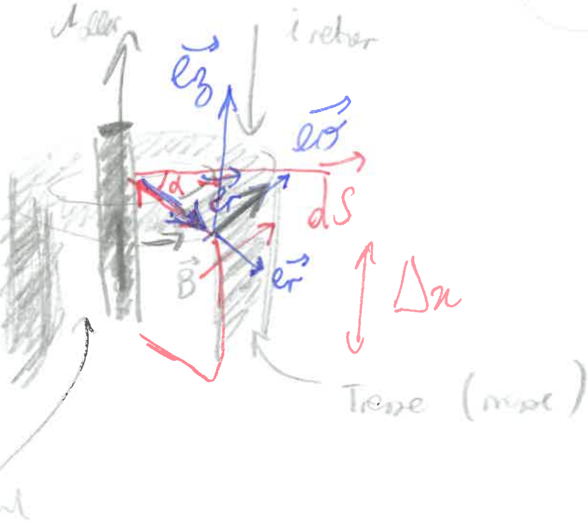
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu}{2\pi}\,\frac{i}{r}\,\vec{e_\theta}$$

D'après [femto-physique.fr / électromagnétisme / Biot et Savart]

Passage au flux magnétique

⚠ ⚠ ⚠ LE FLUX MAGNETIQUE N'EST JAMAIS CONNU, IL DÉPEND DE LA SURFACE ENTRE LE FIL DANS LEQUEL PASSE LE COURANT i (QUI GÉNÈRE LE CHAMP MAGNÉTIQUE $\vec{B}$) ET LE FIL RETOUR DE i

Dans le cas d'un câble coaxial :



$\vec{B}$ colinéaire à $\vec{dS}$

On intègre sur le diamètre du câble et non sur le rayon car il n'y a plus l'angle

$$\phi = \iint_S B \cdot \vec{dS} = \int_0^{\pi}\int_{r_{coeur}}^{r_{coeur}+r_{isolant}} \frac{\mu}{2\pi}\frac{1}{r}\, dr\, dz = -\frac{\mu}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{r_{isolant}+r_{coeur}}^{r_{isolant}-r_{coeur}} \Delta x$$

on intègre le r de $\vec{B}$

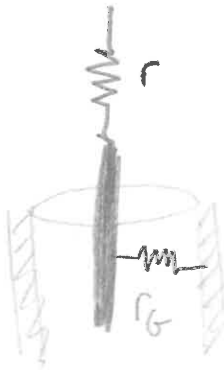
toute la tresse $\simeq -\frac{\mu}{2\pi}\frac{2}{r_{isolant}^2}\Delta x$

$$\Rightarrow L' = \left|\frac{\phi}{B}\right| = \frac{\mu}{2\pi}\frac{2}{r_{isolant}^2}\Delta x$$

$$\Rightarrow L'C' = \mu\varepsilon$$

(avec $\mu\varepsilon = \mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{c^2}$

Calcul de r' et r_G' :



$$r = \rho_{cuivre} \frac{l}{\pi r_{cuivre}^2} \quad l = \Delta x$$

$$r_G = \rho_{isolant} \frac{r_{isolant}}{\int_0^{2\pi} \int_{r_{cuivre}=0}^{r_{cuivre}=r_{isolant}} r \, dr \, d\theta}$$

$$r_G = \rho_{isolant} \frac{r_{isolant}}{\frac{r_{isolant}^2}{2} 2\pi}$$

$$r_G = \frac{\rho_{isolant}}{r_{isolant} \pi}$$

Obtention de l'équation d'onde (l'équation de De D'Alembert) pour la Tension

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -r' \frac{\partial i}{\partial x} - l' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right)$$

Théorème de Schwartz, on permute les dérivation : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial i}{\partial x}\right)$

et en utilisant la dernière équation qui donne $\frac{\partial i}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r' r_G' v + r' c' \frac{\partial v}{\partial t} + l' \frac{\partial (r_G' v)}{\partial t} + l' c' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Amortissement

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r' r_G' v + (r' c' + l' r_G') \frac{\partial v}{\partial t} + l' c' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Équation d'onde

Obtention de l'équation d'onde (l'équation de De D'Alembert) pour le courant

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -r_G' \frac{\partial v}{\partial x} - c' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

Théorème de Swartz (permutation des ordres de dérivation possible car l'espace et le temps sont dans deux dimensions différents

$$\frac{\partial i^2}{\partial x^2} = -r_G' \frac{\partial v}{\partial x} - c' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

En utilisant la deuxième équation qui donne $\frac{\partial v}{\partial x}$

AMORTISSEMENT

$$\frac{\partial i^2}{\partial x^2} = + r_G' r' i + r_G' l' \frac{\partial i}{\partial t} + c' r' \frac{\partial i}{\partial t} + c' l' \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Équation d'onde

Dans un milieu sans pertes $r' = r_G' = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = l' c' \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = l' c' \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \end{cases}$$

AVEC L'EQUATION DE D'ALEMBERT ON ACCEDE À LA VITESSE DE L'ONDE ET NON DU PAQUET D'ONDE !!!

$$v\varphi = \frac{1}{\sqrt{l' c'}}$$

Loi des mailles sur dx

$$\vartheta(x,t) - \vartheta(x+dx,t) = R'\Delta x \cdot i(x,t) + L'\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\vartheta(x+\Delta x,t) - \vartheta(x,t)}{\Delta x} = -R' i(x,t) - L' \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

En faisant tendre Δx vers 0

$$\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} = -R' i(x,t) - L' \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

Loi des noeuds sur le noeud N :

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = \frac{1}{r_G'} \Delta x \cdot \vartheta(x+dx,t) + C'dx \frac{\partial(\vartheta(x+dx,t))}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{i(x+dx,t) - i(x,t)}{dx} = -\frac{1}{r_G'} \vartheta(x+dx,t) - C' \frac{\partial \vartheta(x+dx,t)}{\partial t}$$

En faisant tendre Δx vers 0

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{r_G'} \vartheta(x,t) - C' \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ les équations télégraphiques complètes obtenues pour une ligne de transmission :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} = -r' i(x,t) - \ell' \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -r_G' \vartheta(x,t) - c' \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Solutions des équations en régime sinusoïdal :

D'APRÈS LES ÉQUATIONS TÉLÉGRAPHISTES, EN SUPPOSANT $r' = G' = 0$ (≡ SANS PERTES).

$$v(x,t) = \mathrm{Re}\left[V(x)e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -j\omega L' i \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\omega^2 L'C' v$$

$$i(x,t) = \mathrm{Re}\left[i(x)e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -j\omega C' v \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\omega^2 L'C' i$$

⚠ ⚠ ⚠ OBLIGATOIREMENT "j" CAR LA LETTRE "i" EST DÉJÀ UTILISÉE POUR LE COURANT !!!

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\omega^2 L'C' v \\[2ex] \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\omega^2 L'C' i \end{cases}$$

(équation d'Helmoltz ≡ équation de dispersion où la partie spatiale a été maintenue)

(équation d'Helmoltz ≡ $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -\omega^2 v^2 i$

à la place de la relation de dispersion qui développe aussi $\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -k^2 i$

$\Rightarrow k^2 = \omega^2 v^2$)

⚠ ⚠ ⚠ LES ÉQUATIONS D'HELMOTZ SONT TRÈS PRATIQUES CAR À LA PLACE D'OBTENIR UNE RELATION DE DISPERSION, EN LAISSANT SOIT LA VARIABLE SPATIALE (GÉNÉRALEMENT) SOIT LA VARIABLE TEMPORELLE, ELLE SE RAMÈNENT À L'ÉQUATION D'UN OSCILLATEUR (ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \omega^2 L'C' v = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2} + \omega^2 L'C' i = 0 \end{cases}$$

En utilisant l'équation caractéristique :

$$r^2 + \omega^2 L'C' r = 0$$
$$\Rightarrow r^2 = -\omega^2 L'C'$$
$$\Rightarrow r = \pm j\omega\sqrt{L'C'}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(x) = V^+ e^{-j\omega\sqrt{L'C'}x} + V^- e^{j\omega\sqrt{L'C'}x} \\ i(x) = i^+ e^{-j\omega\sqrt{L'C'}x} + i^- e^{j\omega\sqrt{L'C'}x} \end{cases}$$

En rajoutant

$$\Rightarrow \begin{cases} v(x,t) = V^+ e^{j\omega(t-\sqrt{L'C'}x)} + V^- e^{j\omega(t-\sqrt{L'C'}x)} \\ i(x,t) = i^+ e^{j\omega(t-\sqrt{L'C'}x)} + i^- e^{j\omega(t-\sqrt{L'C'}x)} \end{cases}$$

EXPRESSION DE L'IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE Z_0 POUR RELIER $v(x,t)$ AVEC $i(x,t)$:

A partir de l'équation des télégraphistes (en terme)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -j\omega L' i \qquad (1)$$

d'autre part, pour une solution d'onde en exponentielle complexe :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -jkv^+ e^{j(\omega t - kx)} + jkv^- e^{j(\omega t + kx)} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \cancel{-}j\omega L' i = +j\omega L' i = +jkv^+ e^{j(\omega t - kx)} \cancel{+} jkv^- e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\Rightarrow i = \frac{k}{\omega L'}\left(v^+ e^{j(\omega t - kx)} - v^- e^{j(\omega t + kx)}\right)$$

$$\Rightarrow i = \underbrace{\sqrt{\frac{C'}{L'}} v^+}_{\text{"} i^+ \text{"}} e^{j(\omega t - kx)} \underbrace{- \sqrt{\frac{C'}{L'}} v^-}_{\text{"} i^- \text{"}} e^{j(\omega t + kx)}$$

Impédance caractéristique = $\frac{\text{Cause}}{\text{Conséquence}}$

$$Z_0 = \frac{v(x,t)}{i(x,t)} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\;\frac{\cancel{V^+} e^{j(\omega t - kx)}}{\cancel{V^+} e^{j(\omega t - kx)}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

SANS RÉFLEXION

(= CABLE DE LONGUEUR INFINIE)

!

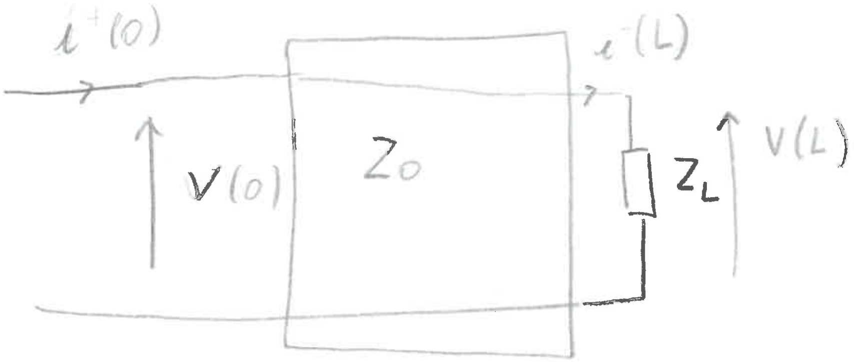
CETTE IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE EST DÉTERMINÉE SANS PERTE (PURAMENT IDÉALE)

ET À CAUSE DE LA CHARGE :

$$|i(L)| \neq \frac{|v(L)|}{Z_0}$$

MONTAGE TYPE QUADRIPOLE :

$$v = v_{\sim} + v_{r}$$
$$i = i_{\sim} + i_{r}$$



DÈS QU'UNE ONDE CHANGE DE MILIEU

⇒ PHÉNOMÈNES DE TRANSMISSION ET DE RÉFLEXION !!!

$$v(x) = V^+ e^{-jkx} + V^- e^{+jkx}$$

$$i(x) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkx} - \frac{V^-}{Z_0} e^{+jkx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V^+ = \dfrac{v(x) + Z_0 i(x)}{2} \\ V^- = \dfrac{v(x) - Z_0 i(x)}{2} \end{cases}$$

$$Z_L(x) = \frac{v(x)}{i(x)} = Z_0 \times \frac{V^+ e^{-jkx} + V^- e^{+jkx}}{V^+ e^{-jkx} - V^- e^{jkx}}$$

Charge en un point x

$Z_L(x)$ SE MESURE À L'AIDE DU COEFFICIENT DE REFLEXION $\Gamma(x)$

$\Gamma_V(x) = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -1$ (avec $Z_L = 0$)

- Si $\Gamma_V(x) = -1$ (pas de reflexion de la tension $\Rightarrow$ noeude de tension $\Rightarrow$ Court circuit (≡ ventre de courant)) $(\Rightarrow \Gamma_i(x) = 1)$
- Si $\Gamma_V(x) = 1$ (reflexion totale de la tension $\Rightarrow$ ventre de tension $\Rightarrow$ circuit ouvert (≡ noeude de courant)) $(\Rightarrow \Gamma_i(x) = -1)$

$\Gamma_V(x) = \dfrac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \approx 1$ (avec $Z_L = +\infty$, Z_0 négligeable)

- DANS LE CAS GENERAL $\Gamma(x) \in]-1; 1[$

$$\Gamma(x)\left(Z_L(x) + Z_0\right) = Z_L(x) - Z_0$$

$$\Rightarrow (\Gamma(x) - 1) Z_L = -2Z_0 \Rightarrow Z_L = \frac{-2Z_0}{\Gamma(x) - 1} = \frac{2Z_0}{1 - \Gamma(x)}$$

IL S'AGIT DES AMPLITUDES

⚠⚠⚠ CAS PROBLEMATIQUE LORSQUE $\Gamma(x) = 1$
$\Rightarrow Z_L \to +\infty$ (≡ CIRCUIT OUVERT)

Coefficient de ~~transmission~~ en Tension

$$\Gamma_V(x) = \frac{V^-(x)}{V^+(x)} = \frac{v(x) - Z_0 i(x)}{v(x) + Z_0 i(x)} = \frac{\frac{v(x)}{i(x)} - Z_0}{\frac{v(x)}{i(x)} + Z_0} = \frac{Z_L(x) - Z_0}{Z_L(x) + Z_0}$$

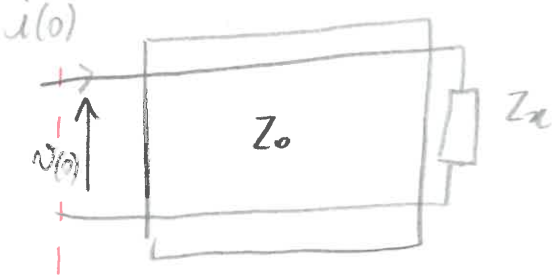
Coefficient de transmission en courant

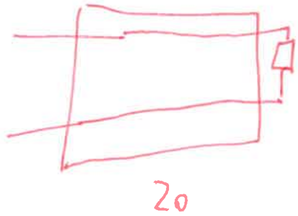
$$\Gamma_i(x) = \frac{i^-(x)}{i^+(x)} = - \Gamma_V(x)$$

⚠⚠⚠ Z_L ET Γ DEPENDENT DE L'ENDROIT OÙ ELLE SONT MESURÉES !!!

Si l'on se place à l'entrée de la ligne

OBSERVATION EN 0





Z_L représentera par abus de langage toujours la charge mise en sortie qui est égale à $Z_L(x)$ à un déphasage près

$$v(0) = V^+ + V^-$$

$$i(0) = \frac{1}{Z_0}(V^+ - V^-)$$

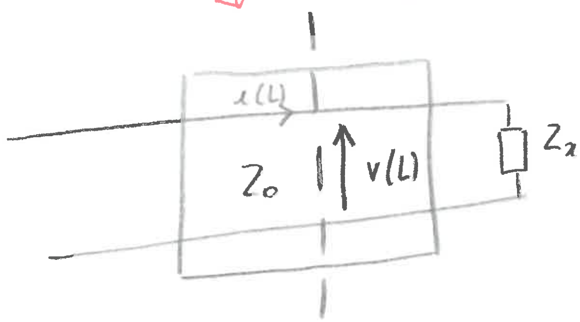
$$Z_L(0) = \frac{v(0)}{i(0)} = \frac{V^+ + V^-}{\frac{1}{Z_0}(V^+ - V^-)} = Z_0 \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-} = Z_0 \frac{V^+ + \Gamma(0) V^+}{V^+ - \Gamma(0) V^+} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(0)}{1 - \Gamma(0)}$$

$$\Gamma(0) = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L(0) - Z_0}{Z_L(0) + Z_0}$$

⇒ PEU IMPORTE D'OÙ L'ON MESURE Z_L (À QUEL x), ON OBTIENDRA TOUJOURS LA MÊME VALEUR À UN DÉPHASAGE PRÈS.
C'EST LA RAISON POUR LAQUELLE LA MAJORITÉ DES LIVRES CALCULENT $Z_L(0)$ ET $\Gamma(0)$

Si on se place à une distance L de la ligne :

OBSERVATION EN L



$$v(L) = V^+ e^{-jkL} + V^- e^{+jkL}$$

$$i(L) = \frac{V^+}{Z_0} e^{-jkL} - V^- e^{+jkL}$$

$$\Rightarrow Z_L(L) = \frac{v(L)}{i(L)}$$

$$\Gamma(L) = \frac{V^-(L)}{V^+(L)} = \frac{Z_L(L) - Z_0}{Z_L(L) + Z_0} = \frac{Z_L(0) - Z_0}{Z_L(0) + Z_0} e^{2kL}$$

ON NE RAJOUTE QU'UN DÉPHASAGE

Rappel 1 : EN L'ABSENCE DE PERTES :

$$\Gamma + T = 1$$

Coefficient de réflexion

Coefficient de transmission

$$\Rightarrow \boxed{T = 1 - \Gamma}$$

ADAPTATION D'IMPEDANCE :

L'IMPEDANCE EST ADAPTÉE LORSQUE LE MAXIMUM DE PUISSANCE D'ENTRÉE EST TRANSMIS À LA CHARGE DE SORTIE

≡ LORSQUE LE COEFFICIENT DE TRANSMISSION EST NUL :

$$\Gamma = \frac{Z_{L_{adapté}} - Z_0}{Z_{L_{adapté}} + Z_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_{L_{adapté}} = Z_0$$

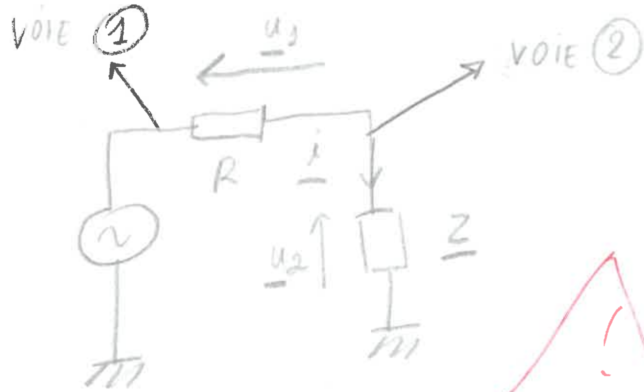
POUR UNE CHARGE Z_L ADAPTÉE

$$\Gamma(0) = \frac{Z_L(0) - Z_0}{Z_L(0) + Z_0} \equiv \Gamma(L) = \frac{Z_L(0) - Z_0}{Z_L(0) + Z_0} e^{-2kL} = 0$$

⇒ PEUT IMPORTE EN QUEL POINT DU CIRCUIT ON SE PLACE POUR MESURER LA CHARGE LES RAISONNEMENTS SONT IDENTIQUES À UN DEPHASAGE PRÈS !!!

Mesures dans un câble coaxial :

- Mesure de l'impédance à l'oscilloscope



$i_1 = \dfrac{u_1}{R}$

MAIS IL FAUT SE METTRE DANS LE MODE "MATH" DE L'OSILLOSCOPE QUI PERMET DE MESURER LA DIFFÉRENCE ENTRE LES 2 VOIES AFFICHÉES !!!

$\underline{u_1} = V_1 - V_2$!!!

SINON FAIRE 2 MESURES : V_1 - GND !!!

ET

V_2 - GND !!!

A mesurer à l'oscilloscope

A déterminer

$$\begin{cases} u_2 - GND = \underline{Z}\,\underline{i} \\ \underline{i} = \dfrac{u_1 - u_2}{R} \end{cases}$$

à mesurer à l'oscilloscope

connu

D'après [Youtube (Jean-Julien Fleck, PCSI, Physique, Klebe) / TP Express, oscilloscope et mesure d'impédance]

$$u_2 - GND = \underline{Z}\,\frac{(u_1 - u_2)}{R}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = R \times \frac{u_2 - GND}{u_1 - u_2} \Rightarrow \begin{cases} |Z| = R \times \dfrac{|u_2|}{|u_1 - u_2|} \\ \varphi = \mathrm{Arg}(Z) = \mathrm{Arg}\,\dfrac{u_2}{u_1 - u_2} \end{cases}$$

rapport des amplitudes