# LP49 : Portraits de phase d'un oscillateur harmonique :

Rappel : équation différentielle d'un oscillateur harmonique sans frottements :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Passage aux énergies $\int dE \equiv \int v\, dt = \dot{\theta}\, dt$ (pas [illegible])

Méthode de l'intégrale première du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$\times \dot{\theta}$

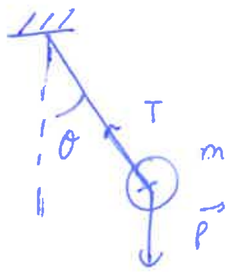
$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta}\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_0^2}{2}\theta^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\theta^2\right) = 0$$

⚠ ⚠ ⚠ POUR PASSER AUX ÉNERGIES, IL FAUT FAIRE APPARAÎTRE LA MASSE À PARTIR DE $\omega_0$. PAR EXEMPLE

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ pour un pendule simple
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pour un oscillateur à ressort




En multipliant chaque terme de l'équation par m :

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\theta^2\right) = 0$$


Par intégration entre 0 et t

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega_0^2\theta^2}_{E_p} = \underbrace{\text{Constante}}_{E_m}$$

(en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée)

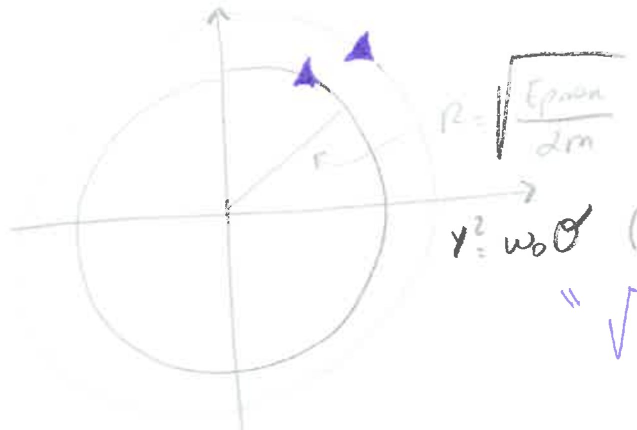
⚠ ⚠ ⚠ DÉVELOPPER PLUTÔT LE CAS CONCRET (

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\dot{\theta}^2}_{X^2} + \underbrace{(\omega_0 \theta)^2}_{Y^2} = \frac{E_M}{2m} = R^2$$

$E_M = E_{p\max}$ lorsque la vitesse est nulle

Il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{\frac{E_{p\max}}{2m}}$

$X^2 = \dot{\theta} = \text{vitesse} \equiv \sqrt{E_c}$




Approximation petits angles non valable

$\omega_0 \theta_{max} \simeq \omega_0 \frac{4}{90} \times 2\pi$

$\nwarrow 360°?$

$Y^2 = \omega_0 \theta$ ($\omega_0 \times$ distance)

$\equiv \sqrt{E_p}$

1ère remarque : si $E_M$ est constante (absence de frottements) $\Rightarrow E_c + E_p = \text{constante}$

$\Rightarrow X^2 + Y^2 = \text{constante}$

$\Rightarrow$ les cercles sont de taille constante

2ième remarque : Si $E_M$ est constante $\Rightarrow$ lorsque $E_c \nearrow$ alors $E_p \searrow$ et inversement

$\Rightarrow$ les cercles sont décrits dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire)

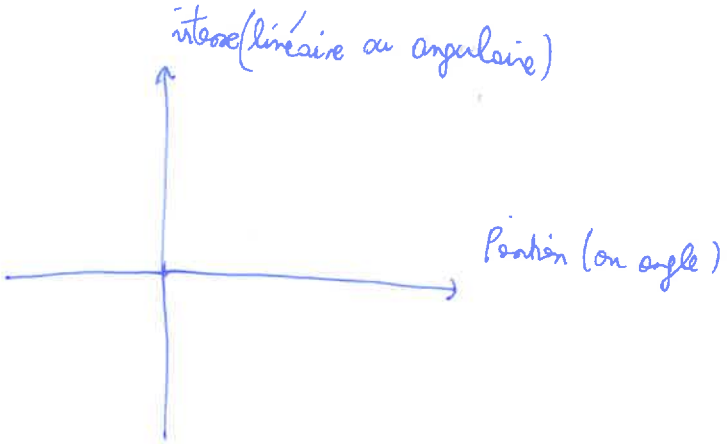
3ième remarque : $\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \theta^2 = \text{Constante } (E_M)$ est l'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes dans l'espace considéré

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{m}}\right)^2} + \frac{\theta^2}{\omega_0 \sqrt{2m}} = R^2 \quad \left(\equiv \frac{\dot{\theta}^2}{a^2} + \frac{\theta^2}{b^2} = R^2\right)$$

Si on multiplie tous les termes par $a^2$ : $\dot{\theta}^2 + \left(\frac{a}{b}\theta\right)^2 = a^2 R^2$ on obtient l'équation d'un cercle si le changement de variable $X' = \dot{\theta}$ et $Y' = \frac{a}{b}\theta$ est effectué !!

# MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

# DES PORTRAITS DE PHASE




2 méthodes pour le tracé du diagramme :

- Résolution de l'équation différentielle et dérivation de la solution pour avoir la vitesse
- Mettre l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation contenant d'un cercle par changement de variables

## 1) Cas de l'oscillateur simple et approximation petits angles

**Méthode 1 :**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

**Méthode 2 :**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \times \dot{x}$$

(Dérivée première du mouvement)

$$\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x} x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}x^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = \text{Constante } (E_m)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{x}^2}_{X^2} + \underbrace{(\omega_0 x)^2}_{Y^2} = \underbrace{2\,\text{Constante}}_{R^2}$$

⚠ ⚠ ⚠ UTILISATION D'UNE IA (CHATGPT)

POUR RÉSOUDRE LES QUESTIONS

- MATHÉMATIQUES

- VOCABULAIRE / CONCEPTS

PERMET UN GAIN DE TEMPS CONSIDERABLE

- Effets anharmoniques

Sans l'approximation des petits angles, l'équation caractéristique d'un oscillateur est :
(modèle sans frottements)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

=> La solution de cette équation ne sera pas purement sinusoïdale => anharmonicité

Description mathématique :

Méthode 1 : Résolution de l'équation différentielle d'ordre 2

$$x(t) = 2 \arcsin\left(k \, \mathrm{sn}(\omega_0 t, k)\right)$$

$$\mathrm{sn}(t) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

fonction elliptique de Jacobi

Mise en forme de l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation cartésienne elliptique (par changement de variable)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

$\times \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta)\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\cos(\theta)\right) = 0$$

Par intégration de chaque côté de l'équation

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\cos(\theta) = \text{Constante}$$

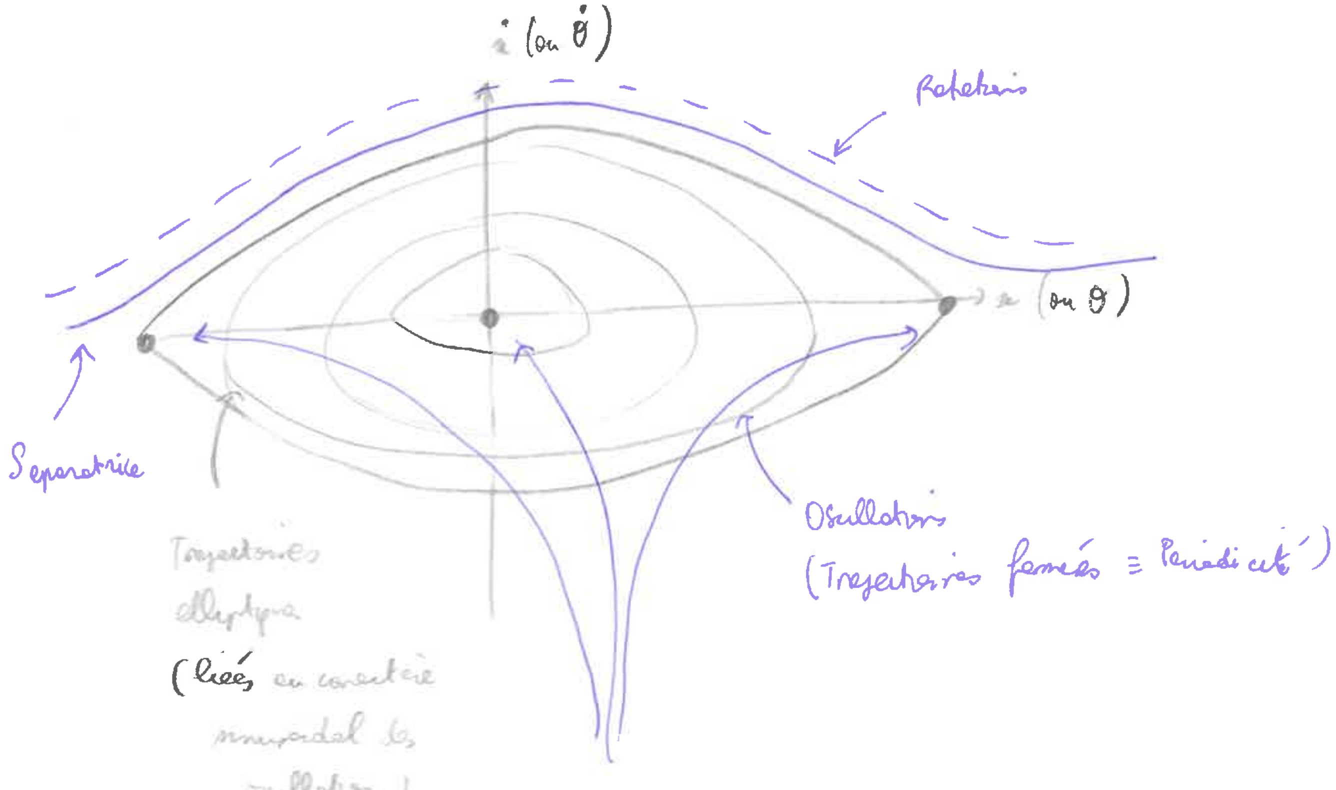
En posant $X = \dot{\theta}$ et $Y = \omega_0 \theta$

$$X^2 + 2\omega_0^2 \cos\left(\frac{Y}{\omega_0}\right) = 2E_m$$

Si l'on choisit $X_2 = X'$ et $Y_2 = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

alors

$$X_2^2 + Y^2 = \text{Constante} \text{ (équation d'un cercle)}$$




POINTS FIXES (≡ PAS DE DÉPLACEMENT)

⇒ TRAJECTOIRES DE PLUS EN PLUS APPLATIES DÈS LORS QUE $\theta_0$ AUGMENTE JUSQU'À LA COURBE SÉPARATRICE

⇒ LES OSCILLATIONS SE FONT AUTOUR DE CE POINT DANS L'ESPACE $(x, \dot{x})$ !!!

⇒ Plusieurs points fixes ≡ plusieurs axes d'oscillations ???

Les courbes ne se croisent pas, car d'après le déterminisme physique, un système n'a qu'une seule façon d'évoluer

- Avec amortissement

L'équation différentielle qui caractérise l'oscillateur devient :

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$ (Pendule simple pesant avec rotation) ou $\ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (pendule simple pesant avec translation)

$\times\dot{\theta}$ pour passer à la dérivée temporelle

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\frac{\theta}{2}\right) = -\lambda\dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \ldots$$

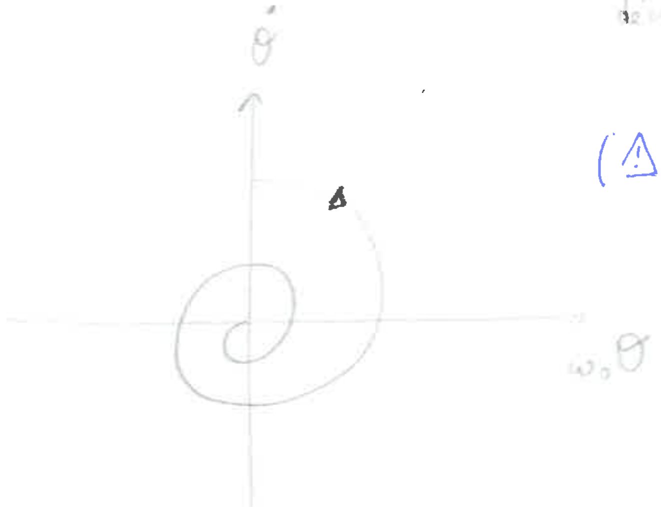
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\frac{\theta}{2} = -\lambda\int\dot{\theta}^2 dt \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \omega_0^2\frac{x}{2} = -\lambda\int\dot{x}^2 dt$$

Si $\dot{\theta}$ n'est pas connu en fonction de $t$, l'intégrale ne peut être calculée

$\times m$ (chaque terme de part et d'autre de l'égalité)

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega_0^2\theta}_{E_p} = \underbrace{-m\lambda\int\dot{\theta}^2 dt}_{E_m}$$

$E_m$ ... le rayon du cercle ($\sqrt{E_c} \cdot f(\sqrt{E_p})$) décroît en fonction du temps à cause des frottements ($\Rightarrow$ spirale)




(⚠⚠⚠ ON PEUT DIRE QUE LE RAYON DU CERCLE DÉCROÎT UNIQUEMENT SI ON LINÉARISE $-m\lambda\int\dot{\theta}^2 dt$ !! DONC VALABLE AUTOUR D'UNE CERTAINE VALEUR)

Équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes (DANS L'ESPACE CONSIDÉRÉ)

$$\underbrace{\dot{\theta}^2}_{x^2} + \underbrace{\omega_0^2\theta}_{y^2} = \underbrace{-2\lambda\int\dot{\theta}^2 dt}_{R^2}$$

PASSAGE AUX COORDONNÉES POLAIRES

$$Re^{i\varphi} = -2\lambda\int\dot{\theta}^2 dt$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\, e^{i\,(\ldots)} = -2\lambda\int\dot{\theta}^2 dt$$

## Résolution de l'équation différentielle d'ordre 2

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right)$$

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\lambda t/2}\left[-\frac{\lambda}{2}\left(A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right) - A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)\right]$$

## Mise en forme de l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation cartésienne d'ellipse par changement de variable

$$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$\times \dot{\theta}$

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \lambda\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_0^2}{2}\theta^2\right) = -\lambda\dot{\theta}^2$$

En intégrant les termes de chaque côté de l'équation :

$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = -2\lambda\int \dot{\theta}^2 dt + \underset{E_M|_0}{\underset{\shortparallel}{C}}$$

En posant $X = \theta'$ et $Y = \omega_0\theta$, l'équation peut être mise sous la forme d'une équation de cercle en coordonnées cartésiennes

$$X^2 + Y^2 = R(t)^2$$

$$X^2 + Y^2 = E_M|_0 - \underline{2\lambda\int \dot{\theta}^2 dt}$$

Perte d'énergie due aux frottements

- Systèmes forcés : (SANS OU AVEC AMORTISSEMENT)
(APPROXIMATION DES PETITS ANGLES)

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A\cos(\omega t)$ (SANS AMORTISSEMENT)

$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A\cos(\omega t)$ ($\omega \neq \omega_0$ sinon pas la résonance) (AVEC AMORTISSEMENT)

Description mathématique :

Résolution de l'équation différentielle d'ordre 2

1) Sans amortissements

$\ddot{\theta} + \omega_0 = A\cos(\omega t)$

$\theta(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t)$

Formule valable hors résonnance (sinon division par 0) !!!

Résonance à $\omega = \omega_0$

Forme générale :

$\theta(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} \times (t\sin(\omega_0 t))$

AUTRE RÉSULTAT AVEC LA MÉTHODE (cf. femto-physique.fr/ oscillateurs harmoniques méthode de l'amplitude complexe)

2) Avec amortissements

$$\theta(t) = e^{-\lambda t/2}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}}\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}}\right)\right] + \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2}}\cos(\omega t + \varphi)$$

Mise en forme de l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation cartésienne d'ellipse par changement de variable

$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A\cos(\omega t)$ ($\omega \neq \omega_0$ (cas général))

Intégrale première du mouvement

$\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A\cos(\omega t)$

$\times\dot{\theta}$

$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \lambda(\dot{\theta})^2 + \omega_0^2\dot{\theta}\theta = A\dot{\theta}\cos(\omega t)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\omega_0^2\theta^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{A\dot{\theta}}{\omega}\sin(\omega t)\right) + \frac{d}{dt}\left(-\lambda\int\dot{\theta}^2 dt\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2\theta^2 = \frac{A\dot{\theta}}{\omega}\sin(\omega t) - \lambda\int\dot{\theta}^2 dt$

En posant : $X = \dot{\theta}$, $Y = \omega_0\theta$ :

1) Sans amortissement

$X^2 + Y^2 = \frac{A}{\omega}X\sin(\omega t)$

2) Avec amortissements

$X^2 + Y^2 = R^2(t) + \frac{A}{\omega}X\sin(\omega t)$

$-2\lambda\int\dot{\theta}^2 dt$

— POUR L'OSCILLATEUR AMORTI ET FORCÉ :

⚠ ⚠ ⚠ LA RÉPONSE LIBRE N'EST QUE DE COURTE DURÉE POUR UN OSCILLATEUR AMORTI (ET FORCÉ)

⇒ DANS LE CAS D'UN OSCILLATEUR AMORTI FORCÉ, UNE FOIS LA RÉPONSE TRANSITOIRE FINIE $\theta_H(t) \to 0$,

$\theta_g(t) = \theta_p(t)$ EN RÉGIME PERMANENT

⇒ DANS LE CAS D'UN OSCILLATEUR AMORTI FORCÉ, EN RÉGIME PERMANENT :

$$\theta_g(t) = \theta_p(t) = \underbrace{\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\lambda\omega)^2}}}_{=X_0} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_g(t) = -\omega X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

En éliminant le temps pour obtenir une équation entre $\theta_g$ et $\dot{\theta}_g$ :

Nouvelle variable

$$\theta_g = X_0 \cos(\omega t + \varphi) = X_0 (X)$$

$$\dot{\theta}_g = -\omega X_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega X_0 (X')$$

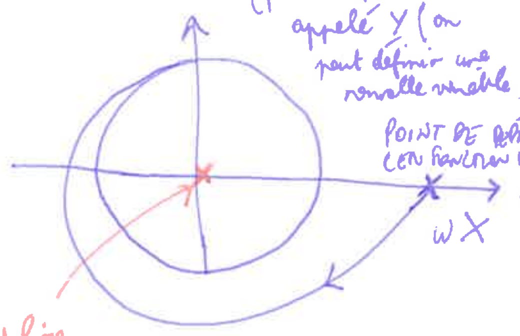
PUIS ON UTILISE L'IDENTITÉ FONDAMENTALE :

$$\cos^2(\ ) + \sin^2(\ ) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{X'}{\omega X_0}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\omega X)^2 + (X')^2 = X_0^2 = \frac{A^2}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+(\lambda\omega)^2)}$$

Portrait de phase d'un oscillateur amorti et forcé :




Point fixe = CENTRE DANS LA ROTATION DANS LE GRAPHIQUE !!! (= DANS UN ESPACE $(\theta,\dot\theta)$ !!!

Spirale (régime transitoire) qui converge vers un cercle (régime forcé)

b) Avec résonance :

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Résolution avec des solutions particulières de type sin

ChatGPT a bien différencié la résolution de l'équation différentielle

$$\theta'' + \omega_0^2 \theta = A \cos(\omega t)$$

lorsque :

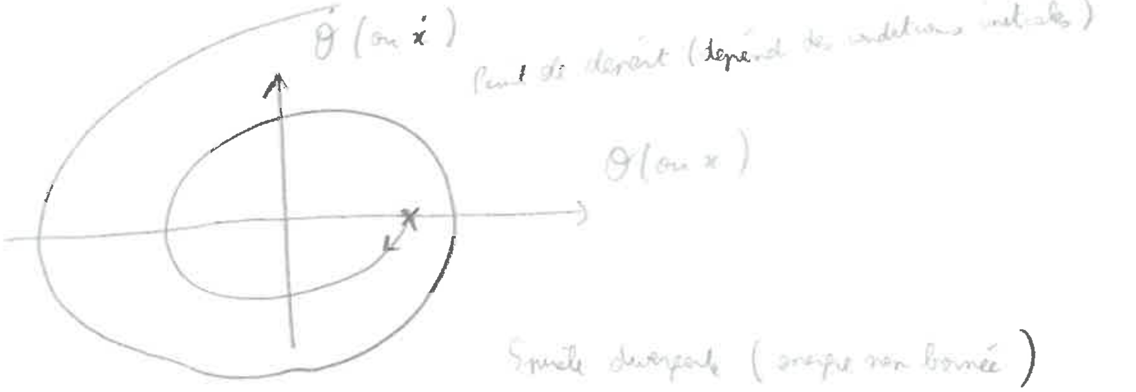
- $\omega \neq \omega_0$ , $\theta_p = \dots$
- $\omega = \omega_0$ , $\theta_p = \cdot$

ou (d'après Formule-physique fr/Oscillateurs Harmoniques] qui utilise la méthode de l'exponentielle complexe car $A \cos(\omega t) = \mathrm{Re}(A e^{i\omega t})$)

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\lambda\omega)^2}}}$$

Ne s'annule pas ∀ la valeur de ω réel !!!

Après avoir calculé $\dot{\theta}(t)$ en fonction de la méthode choisie, le portrait de phase peut être obtenu



– POUR L'OSCILLATEUR NON AMORTI ET FORCÉ :

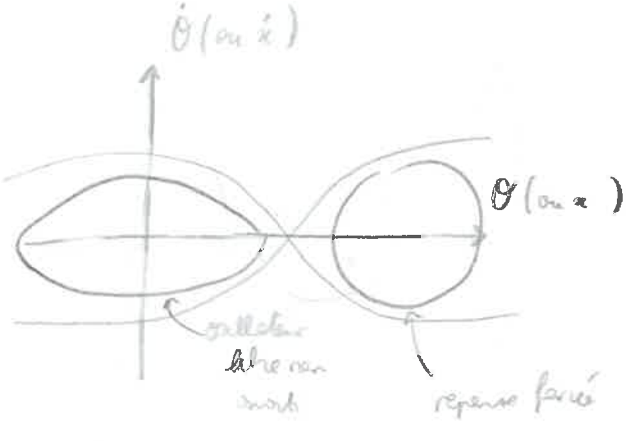
⚠ ⚠ ⚠ $\theta_g(t) = \underbrace{\theta_H(t)}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{\theta_p(t)}_{\text{Réponse forcée}}$

MAIS DANS CE CAS IL N'Y A PAS DE RÉPONSE TRANSITOIRE CAR $\theta_H(t)$ (LA RÉPONSE LIBRE) NE S'ATTÉNUE PAS DANS LE TEMPS !!!

a) Sans résonance : $\left(\omega \neq \omega_0 \pm \frac{B\ell}{2}\right)$

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

$\dot{\theta}(t) = \dots$

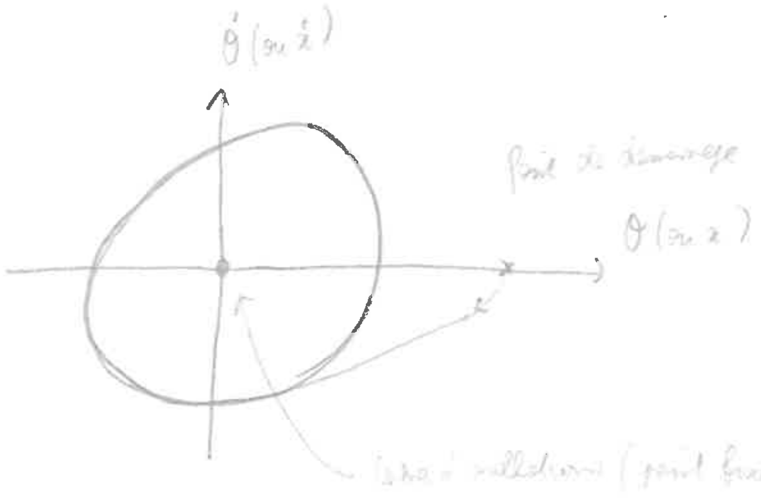



???

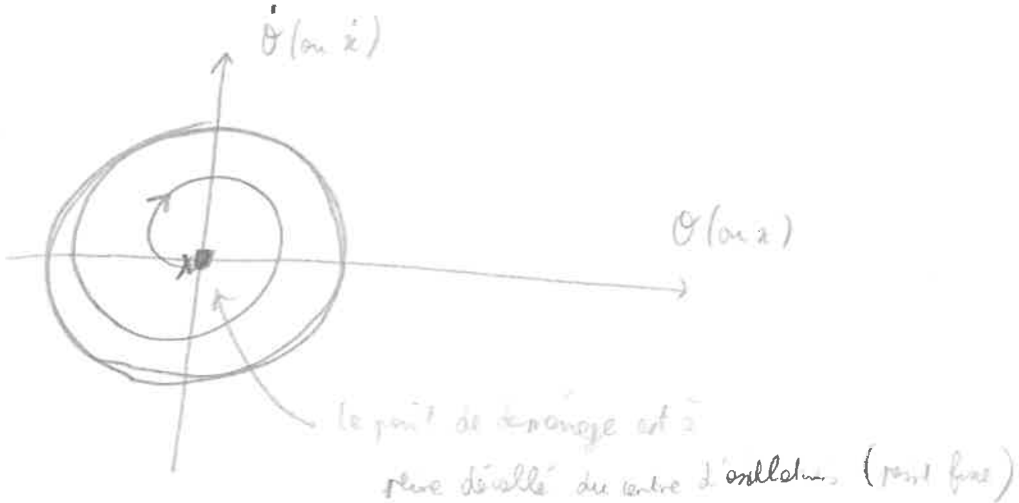
(A FAIRE CAR NON OBTENU DANS LA LITTÉRATURE)

- Trajectoires non fermées
- Trajectoires denses qui décrivent une zone
- 2 points fixes

Avec comme conditions initiales : $\begin{cases} \theta_0 = \theta_{max} \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases}$




Avec comme conditions : $\begin{cases} \theta_0 = \varepsilon \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases}$ un tout petit démarrage



Système auto-entretenu : VAN DER POL (AVEC UN AMORTISSEMENT QUI A UNE CONTRE RÉACTION)

$$\ddot{\theta} - \varepsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right) \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

(L'ÉQUATION DE VAN DER POL MODÉLISE LE COMPORTEMENT D'UN OSCILLATEUR AUTO-ENTRETENU)

RÉTROACTION : ANALYSE DE LA VARIABLE DE SORTIE POUR CORRIGER LE COMPORTEMENT DU SYSTÈME

Si l'amplitude des oscillations $\theta > 0 \Rightarrow$ l'amortissement est négatif : le système perd de l'énergie

Si l'amplitude des oscillations $\theta < 0 \Rightarrow$ l'amortissement est positif : le système gagne de l'énergie

$\Rightarrow$ Cet oscillateur permet ainsi, quelque les conditions initiales, de tendre vers un régime permanent d'amplitude d'oscillations bien défini

Description mathématique :

Résolution de l'équation différentielle d'ordre 2

Mise en forme de l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation cartésienne d'un cercle (par changement de variable)

Expériences :

- Pendule simple + film + extraction position 20 : $\theta(t) < 4°$ !! et $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$
  et tracé $\dot{\theta}(t) = f(\theta(t))$ sur LATIS PRO

- Pendule pesant : même expérience mais en ayant des angles $> 4°$ (anharmonique)

- Ressort dans un fluide (pendule amorti sur un seul axe)

- Idéalement : PROGRAMME PYTHON POUR BIEN COMPRENDRE L'INFLUENCE DE CHAQUE PARAMÈTRES

Résoudre :

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$$ (SOLUTIONS EXACTES IDÉALEMENT)

ou

$$\ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 \sin(x) = A\cos(\omega t)$$

$x(t) = \dots$

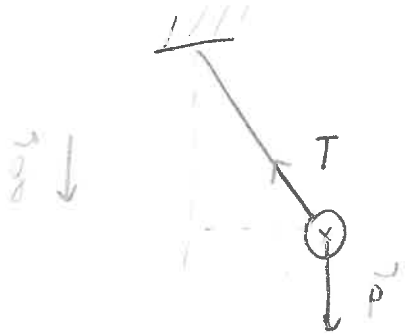
$\dot{x}(t) = \dots$

- Oscillateur électronique
  - Van Der Pol (
  - Pont de Wien (modélisé par une équation de Van Der Pol)
  - Oscillateur à résistance négative → Modélisé par un oscillateur non amorti non forcé si la résistance négative créée par l'AOP compense exactement la résistance du circuit RLC, ce qui n'est généralement pas le cas ⇒ le système sera stabilisé par rétroaction par changement de valeur de la résistance négative
    ⇒ Modélisation plus précise par une équation de Van Der Pol !!!

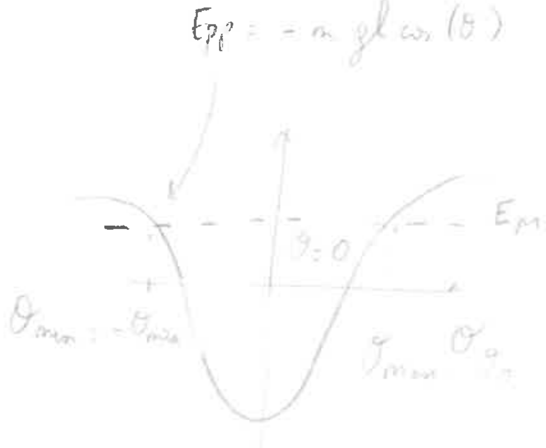
Formule de Borda

[Youtube : ... ( E-learning Physique ) / Oscillations non harmoniques d'un pendule simple - Formule de Borda ]

Pour de grandes amplitudes, un pendule oscille mais a des oscillations non harmoniques




Pas de frottement




Conditions initiales à $t=0$ $\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \boxed{\sin(\theta)} = 0$$

NON LINÉAIRE DANS LE CAS GÉNÉRAL CAR $\sin(\theta)$ N'EST ENVIRON ÉGAL À $\theta$ QUE POUR $|\theta| < 5°$ (APPROXIMATION PETITS ANGLES)

Dans l'approximation petits angles :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Conservation de l'énergie mécanique (modèle sans frottement)

$$E_m = -mg\ell\cos\theta + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 = -mg\ell\cos\theta_0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}\left(-\cos\theta_0 + \cos\theta\right)$$

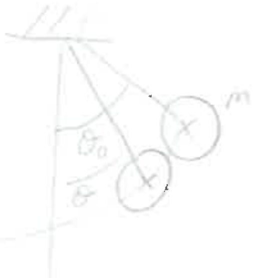
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$> 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{\ell}\left(-\cos\theta_0 + \cos\theta\right)$$

car la masse du pendule descend




$$\Rightarrow dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(-\cos\theta_0 + \cos\theta\right)}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{T/4} dt = \int_{\theta_0}^{0} \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(-\cos\theta_0 + \cos\theta\right)}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}} = \int_0^{\theta} \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

$$\int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4}$$

$$\Rightarrow T = \int_0^{\theta_0} 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

Changement de variable :

$$\sin X = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$$

$$dX\cos(X) = \frac{d\theta}{2}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$$

$$\Rightarrow d\theta = 2dX\cos(X)\frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)}$$

$$\Rightarrow T = \int_{\sin^{-1}(0)=0}^{\sin^{-1}(1)=\pi/2} 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{2dX\cos(X)\frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)}}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}$$

De plus, $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ $\left( \underset{\underset{1-\sin^2(\theta)}{\shortparallel}}{\cos^2(\theta)} = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \Rightarrow 1 - 2\sin^2(\theta) = \cos\right.$

$$\Rightarrow T = \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{2\,dX\cos(X)\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)\sqrt{2\left(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)\right)}}$$

$$\Rightarrow T = \int_0^{\pi/2} 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \frac{2\,dX\cancel{\cos(X)}\,\cancel{\sin(\theta_0/2)}}{\cos(\theta/2)\,\cancel{\sin(\theta_0/2)}\sqrt{2\left(1 - \underbrace{\frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta_0/2)}}_{=\sin^2(X)}\right)}}$$

$\underbrace{\qquad}_{= \cancel{\cos^2(X)}}$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{dX}{\cos(\theta/2)}$$

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)} = \sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\theta_0/2)}_{=k \text{ (constante)}}\sin^2(X)}$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dX}{\sqrt{1 - k^2\sin^2(X)}}$$

$k = \sin(\theta_0/2)$ étant petit (et $\sin(X)$ également) $k^2\sin^2(X)$ (élévation au carré de termes petits et multiplication par d'autres termes petits permettent de considérer $k^2\sin^2(X)$ et non $\sin(X)$ comme petit !!!

En faisant un D.L. de $\frac{1}{\sqrt{1-Y}} = (1-Y)^{-1/2}$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}\left(k^2\sin^2(X)\right)\right)dX$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\left(\frac{1-\cos(2X)}{2}\right)\right)dX$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[X + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}k^2\frac{\sin(2X)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[\pi/2 + \pi/8\, k^2\right]$$

$$= T_0\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right)$$

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right)$$

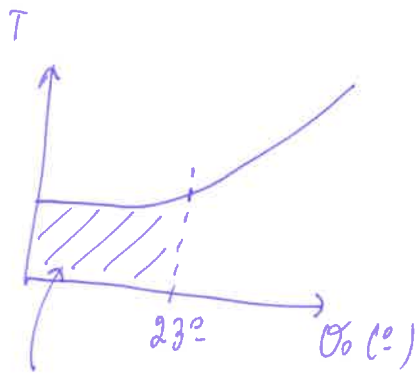
$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2(\theta_0/2)\right)$$

⚠ ⚠ ⚠ IL FAUT AUSSI FAIRE LE D.L. AUTOUR DE 0 DE $\sin^2(\theta_0)$
(ET NON $\sin(\theta_0)$ QUI N'EST PAS FORCÉMENT PETIT !!!)

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_0^2}{4}\right)\right)$$

$$T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

FORMULE DE BORDA VALABLE JUSQU'À 23° ENVIRON




DOMAINE
D'ISOCHRONISME DES
OSCILLATIONS (QUELQUE
SOIT $\theta_0$ DANS CET INTERVAL :
$T \simeq T_0$)