Phénomènes de transport

3 méthodes pour l'étude des flux (≡ convection) (≡ phénomène de transfert par déplacement)

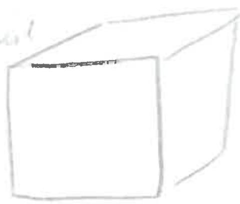
- Bilan spatio-temporel
- Bilan en système ouvert
- Equation de conservation microscopique

(⚠⚠⚠ NE S'APPLIQUE QU'AUX QUANTITÉS QUI SE CONSERVENT (MASSE, QUANTITÉ DE MOUVEMENT OU ÉNERGIE (MÉCANIQUE EN GÉNÉRAL CAR ELLE INCLUE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE ET L'ÉNERGIE POTENTIELLE)

Equation de conservation très générale

On considère le volume élémentaire dV et on fait le bilan de particules qu'il contient

dV



$$N(t) = \iiint n(\vec{r}, t)\, dV$$

densité volumique de particule

$$N(t+dt) = \iiint (n(\vec{r}, t + dt)\, dV$$

$$\Rightarrow N(t+dt) - N(t) = \iiint \frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t}\, dt\, dV$$

En faisant un bilan spatial

$$N(t+dt) - N(t) = -\Phi_{\text{sortant de } l'\text{int}}\, dt$$

$$= -\iint d\Phi\, dt = -\iint \vec{j}_n(\vec{r}, t)\, \vec{dS}\, dt = -\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n(\vec{r}, t)\, dV\, d$$

Utilisation du théorème de Green-Ostrogradski

$$\Rightarrow \iiint \frac{\partial n(\vec{r},t)}{\partial t}\, dV dt = -\iiint \vec{\nabla}\cdot \vec{j}_n(\vec{r},t)\, dV dt$$

$$\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_n = 0$$

CECI EST VRAI POUR UN MILIEU À L'ARRÊT, ISOTROPE POUR UN MILIEU EN MOUVEMENT DONT LES PROPRIÉTÉS DÉPENDENT DE $\vec{r}$

ON PEUT GÉNÉRALISER L'ÉQUATION EN REMPLAÇANT LA DÉRIVÉE TEMPORELLE

PAR LA DÉRIVÉE PARTICULAIRE :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})n + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_n = 0$$

EN RAJOUTANT LES TERMES SOURCES (OU PUITS) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})n + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_n = \sigma_{n\,\text{source}}$$

ÉQUATION TRÈS GÉNÉRALE QUI S'APPLIQUE À TOUTES LES QUANTITÉS

QUI SE CONSERVENT :

- LA DENSITÉ VOLUMIQUE DE MASSE
- LA DENSITÉ VOLUMIQUE DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT
- LA DENSITÉ VOLUMIQUE D'ÉNERGIE (L'ÉNERGIE MÉCANIQUE CAR LA PLUS GÉNÉRALE EST UTILISÉE HABITUELLEMENT

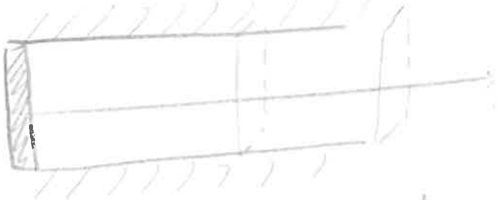
⚠⚠⚠ MAIS LA TEMPÉRATURE N'EST PAS UNE GRANDEUR CONSERVÉE !!!

D'après [Sylvio Rosetti (ENS Lyon) / ... / Phénomènes de Transport]

Equation de la chaleur :

[Elearning-Physique / Cours - Diffusion thermique : l'équation de diffusion et bilan thermique]

Barre calorifugée sur les côtés. Bilan de température le long de la barre (pas de convection !!! pas de diffusion)



Système = { tranche mésoscopique de solide }

x $\quad$ $x+dx$ $\quad$ pas de δQ (latérale interdite)

Flux thermique : $\phi(x,t) = \dfrac{\delta Q}{\delta t} = \iint \vec{j}_{th}(x,t)\, \vec{dS}$

(Puissance) $\quad$ W $\quad$ vecteur surfacique de flux (W/m^2)

(≡ courant thermique !!)

Bilan thermique (LE SYSTÈME EST FERMÉ)

1er Principe de la Thermodynamique à $\{d\tau = S dx\}$ de masse $dm = \rho d\tau$ pendant dt (Phase condensée ou gaz semblable tant que le gaz est au repos)

$dE_c + dE_p + dU = \delta Q + \delta W$ $\quad$ pas de travail car $dV = 0$

$= 0$ (barre au repos)

Bilan temporel $\quad$ Bilan spatial

$dU = dm\, c\, dT = \delta Q_{th}(x,t) - \delta Q_{th}(x+dx,t)$

$U(x,t+dt) - U(x,t)$

$dm\, c\, (T(x,t+dt) - T(x,t))$

$dU = \rho S dx\, c_v \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t)\, dt = \phi(x,t)\, dt - \phi(x+dx,t)\, dt$

$= \vec{j}_{th}(x,t)\, S dt - j(x+dx,t)\, S dt$

$= -\dfrac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}\, dx\, S dt$

à 1 Dimension

$\Rightarrow \rho c_v \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial \vec{j}_{th}(x,t)}{\partial x}$

Généralisation à 3 dimensions et dans toutes les bases :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th} = 0$$

SI LE FLUIDE N'A PAS LES MÊMES PROPRIÉTÉS EN TOUT POINT, LA DÉRIVÉE TEMPORELLE EST REMPLACÉE PAR LA DÉRIVÉE PARTICULAIRE

$$\Rightarrow \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th} = 0$$

EN RAJOUTANT LE TERME SOURCE (POUR INCLURE LE RAYONNEMENT PAR EXEMPLE OU DES PHÉNOMÈNES RADIOACTIFS INTRINSÈQUES AU SYSTÈME ÉTUDIÉ)

$$\Rightarrow \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{th} = \sigma_{th}\big|_{source}$$

⚠ ⚠ ⚠ ON OBTIENT UNE ÉQUATION DE CONSERVATION SUR T QUI N'EST PAS UNE VALEUR QUI SE CONSERVE !!!

- Conduction thermique : (CONDUCTION ≡ DIFFUSION)

(LA FORMULE DE FOURIER RESSEMBLE BEAUCOUP À LA FORMULE DE FICK !!!)

Loi de Fourier :
(Loi phénoménologique de Fourier)

$$\vec{j}_{th}\Big|_{\text{conduction}} = -\lambda \vec{\nabla}(T)$$

$W.m^{-2}$

Conductivité thermique
$\left(\frac{W}{K}.m^{-1}\right)$
En réalité λ dépend aussi de la Température

$K.m^{-1}$

	λ (SI)
Cuivre	390
Verre	1
air (très bon isolant)	$26\ 10^{-3}$

λ et σ varient de la même manière
(Bons conducteurs thermiques ≡ Bons conducteurs d'électricité
⇒ les électrons sont les principaux éléments qui transportent l'énergie thermique)

Loi de Fourier reinjecté dans le bilan thermique. (POUR LA CONDUCTION UNIQUEMENT !!!)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(-\lambda \vec{\nabla}(T)\right)$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\vec{\nabla}(\lambda).\vec{\nabla}(T)}_{\text{supprimé}} + \underbrace{\lambda \vec{\nabla}^2(T)}_{= \lambda \Delta(T)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$$

$\frac{m^2}{s}$ (diffusivité thermique a qui permet de relier une longueur caractéristique de la diffusion avec un temps caractéristique de la diffusion $a = \frac{L_c^2}{\tau_c} \Rightarrow L_c = a\sqrt{\tau_c}$

Résolution de l'équation de diffusion thermique à 1 Dimension

=> Régime permanent

$T(0,t) = T_1$ $\forall t$

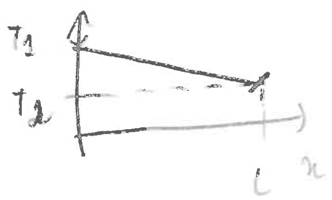
$T(L,t) = T_2$

Régime permanent $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = ax + b = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$$

Avec les conditions aux limites



$$\phi_{th} = j_{th}(x) S$$

$$\phi_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$$

En appliquant la loi de Fourier (conduction uniquement)

$$\phi_{th} = \frac{(T_1 - T_2)}{L} S \lambda$$

Le flux se conserve, il ne dépend pas de x

Analogie semble pour la conduction en régime permanent.

Convection thermique (LA DIFFUSION THERMIQUE (≡ LOI DE FICK) CORRESPOND À LA CONDUCTION THERMIQUE !!!)

Inclure la convection thermique revient à rajouter $\vec{j}_{th}\big|_{conv} = \rho_u \vec{v}$

densité volumique d'énergie interne

$$\vec{j}_{th}\big|_{conv} = \rho_u \vec{v}$$

$U = \iiint \rho_u \, dV$

Dans les modèles il est souvent utilisé $h = \rho_h = \frac{dH}{dV}$ mais il ne faut pas prendre h car l'équation a été établie pour $U = m c_v dT$!!!

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j}_{th}\big|_{conv} + \vec{j}_{th}\big|_{diff} \right) = 0$$

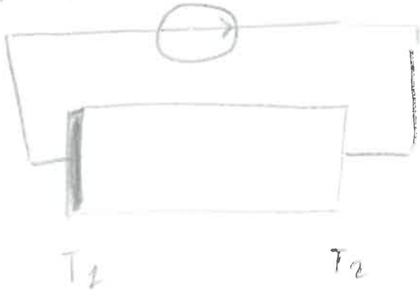
$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_u \vec{v}) - \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla}(T)) = 0$$

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \underbrace{\vec{\nabla}(\rho_u)}_{\text{NON NUL !!!}} \cdot \vec{v} + \rho_u \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{v}}_{= 0 \text{ (pour un écoulement incompressible)}} - \underbrace{\vec{\nabla}(\lambda)}_{\text{supposé nul}} \cdot \vec{\nabla}(T) - \lambda \underbrace{\nabla^2(T)}_{= \Delta(T)} = 0$$

$$\Rightarrow \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_u) \cdot \vec{v} - \lambda \Delta(T) = 0$$

— Rayonnement

L'utilisation du vecteur de Poynting n'est valable que pour les conducteurs soumis à un champ électromagnétique externe :



$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{\Pi}}_{\vec{J}_{th}\ \text{Ray}} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{E}_{ext}\wedge\vec{B}_{ext}}{\mu_0}\right)$$

Si le matériau n'est pas soumis à un champ électromagnétique externe.

Densité spectrale de puissance émise par un corps noir

un corps noir est un corps qui absorbe 100% du rayonnement électrique incident et lorsqu'il est en équilibre à Température T, il réémet 100% du rayonnement reçu sous forme de rayonnement électromagnétique qui ne dépend que de T

$$\Phi_{rad} = \int B_\nu(\nu)\, d\nu = \int \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/k_BT}-1}\, d\nu$$

$\Phi_{rad} = \ldots$ (théorie de Bose Einstein)

$$\Phi_{rad} = \left(\frac{2k^4T^4}{h^3c^2}\,\frac{\pi^4}{15}\right) = \sigma \text{ (constante de Stefan-Boltzmann)}$$

(La loi de Wien donne la longueur d'onde du maximum d'énergie émise en fonction de la Température : $\lambda_{max}T = b \Rightarrow \lambda_{max} \propto \frac{1}{T}$)

Pour un corps noir non idéal

$$\Phi_{rad} = \varepsilon\,\sigma T^4$$

ε : emmisivité

$$\Phi_{rad} = \iint \vec{j}_{rad}\cdot\vec{dS} \Rightarrow \vec{j}_{rad} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{\Phi_{rad}}{S} = \frac{\varepsilon\sigma}{S}T^4$$

s'il est constant sur la surface considérée

A l'intérieur du matériau étudié, le flux radiatif total est donc

$$\vec{J}_{rad\,tot} = \underbrace{\vec{J}_{rad\,T_1}}_{\text{rentre dans le matériau}} - \underbrace{\vec{J}_{rad\,T_2}}_{\text{sort du matériau}}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_{rad\,tot} = \frac{\varepsilon\,\sigma}{S}\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$