Leçon 48 : Phénomènes de résonnance dans les différents domaine de la physique

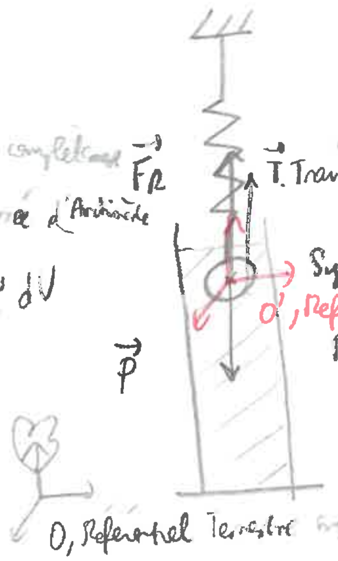
1) Définition de la résonnance

[Youtube.com (Université de Namur) / TP de Physique 8 : la résonnance (1 le pendule élastique)]

la résonnance correspond à un transfert maximum d'énergie entre 2 systèmes oscillants et couplés. L'oscillateur actif qui impose une excitation périodique et entretenue est appellé l'excitateur. L'oscillateur passif qui subit cette oscillation à cause de la présence du couplage est appellé le résonnateur. Lorsque la fréquence de l'excitateur est égal à la fréquence propre du résonnateur, le transfert d'énergie est maximum et cela se traduit par une amplitude maximum de vibration du résonnateur

—

Supposons un oscillateur harmonique avec atténuation tel que



La masse coule complètement donc la poussée d'Archimède

$$\vec{\Pi}_A = \iiint_{V_{deplacé}} \rho \vec{g}\, dV$$

négligée

2nd loi de Newton

$$\vec{F_R} + \vec{T} + \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

$$-k(\vec{l}-\vec{l_0}) - 6\pi\mu r\vec{v} + m\vec{g} = m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

$\xrightarrow{\text{Projection sur } \vec{e_y}}$

$$-k(y-y_{eq})\vec{e_y} - mg\vec{e_y} - 6\pi\mu r\dot{y}\vec{e_y} = m\ddot{y}\vec{e_y}$$

$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y \quad + \quad \frac{6\pi\mu r}{m}\dot{y} = -g$

$$\underbrace{\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y}_{\text{Oscillateur passif}} = \underbrace{g}_{\text{Excitation (réponse forcée)}}$$

Equation différentielle d'ordre 2 avec second membre

1) Résolution de l'équation homogène :

$$\ddot{y}_H(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y}_H(t) + \omega_0^2 y_H(t) = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q} - 2\right)\left(\frac{1}{Q} + 2\right) < 0$$

C'est le régime pseudo-périodique qui nous intéresse

Régime apériodique : $\Delta > 0$

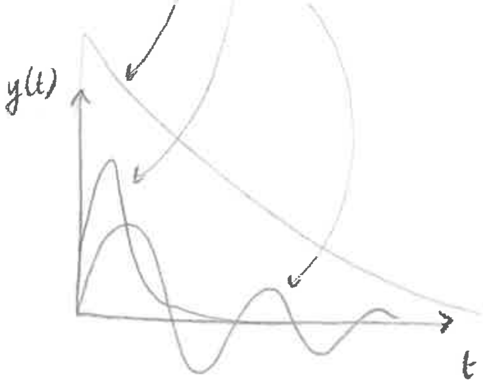
Régime critique : $\Delta = 0$

Régime pseudo-périodique $\Delta < 0$

$$y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A e^{\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}\,t} + B e^{-\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}\,t}\right)$$

$$y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(At + B)$$

$$y(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}\,t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{\frac{1}{Q^2}-4}\,t\right)\right)$$



2) Obtention de la solution particulière

g est une constante $\Rightarrow y_p(t) = \text{constante}$

$\Rightarrow \dot{y}_p(t) = 0$

$\Rightarrow \ddot{y}_p(t) = 0$

$\Rightarrow \omega_0^2 y_p(t) = g$

$\Rightarrow y_p(t) = \frac{g}{\omega_0^2}$

3) Solution générale = solution homogène + solution particulière

$$y_g(t) = y_H(t) + y_p(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_1 t)\right) + \frac{g}{\omega_0^2}$$

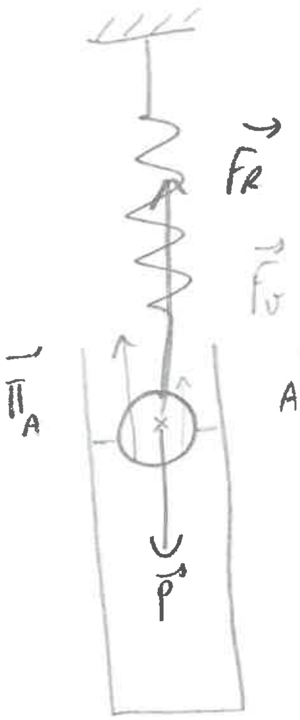
Détermination des constantes à l'aide des conditions initiales

$$\begin{cases} y_g(0) = -y_{max} \\ \dot{y}_g(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A + \frac{g}{\omega_0^2} = -y_{max} \Rightarrow A = -y_{max} - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega_1 B + \frac{g}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow B = -\frac{g}{\omega_0^2 \omega_1}$$

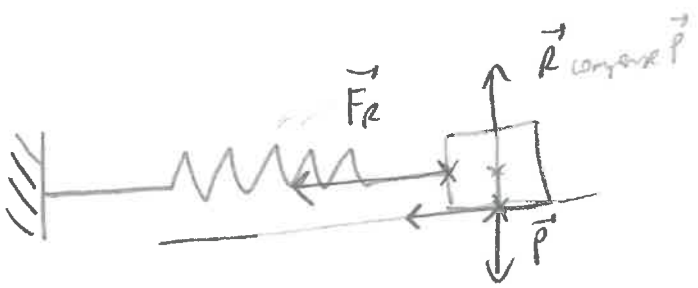
⚠ ⚠ ⚠ POUR ÉVITER D'AVOIR UN SECOND MEMBRE, IL EST PRÉFÉRABLE D'AVOIR UN SYSTÈME OÙ LA POUSSÉE D'ARCHIMÈDE COMPENSE LE POIDS, C'EST-À-DIRE UN OBJET QUI FLOTTE



$\vec{F_v}$ (frottements visqueux utilisés comme amortisseur)

À l'équilibre $\vec{\Pi_A}$ compense $\vec{P}$

AUTRE SYSTÈME POSSIBLE :



Frottements dynamique

(les frottements statiques disparaissent dès le mise en mouvement du système

2nd loi de Newton.

$$\vec{F_R} + \vec{F_v} + \underbrace{\vec{\Pi_A} + \vec{P}}_{\vec{0}} = m\vec{a}$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{6\pi \mu r}{m}\dot{y} + \frac{k}{m} = 0$$

Amortisseur

Passage aux énergies : (par intégrale première du mouvement).

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$\times \dot{y}$

$$\ddot{y}\dot{y} + \frac{\omega_0}{Q}(\dot{y})^2 + \omega_0^2 y\dot{y}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2\right)}_{P_{\text{cinétique}}} + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q}(\dot{y})^2}_{P_{\text{dampée}}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_0^2}{2}y^2\right)}_{P_{\text{potentielle}}} = 0$$

(non intégrable
(donc énergie non
calculable) sans
connaître le
profil de la vitesse
en fonction du temps

Á NE PAS DÉVELOPPER AVEC ω_0 ET Q

MAIS UNIQUEMENT AVEC LES PARAMÈTRES PHYSIQUES

D'UN SYSTÈME SINON LES ÉNERGIES N'ONT PAS DE SENS PHYSIQUE

$$\ddot{y} + \frac{6\pi\mu r}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

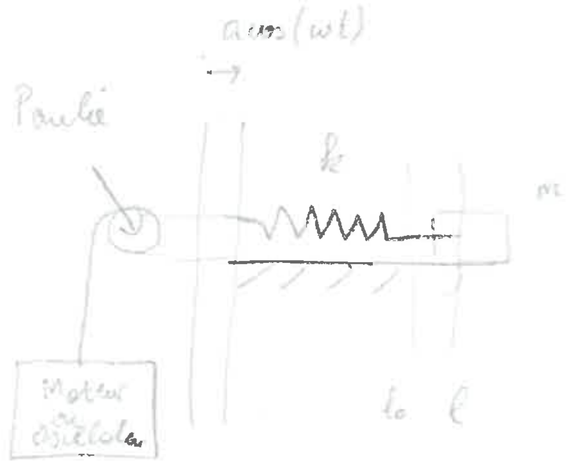
$\times \dot{y}$

$$\Rightarrow \ddot{y}\dot{y} + \frac{6\pi\mu r}{m}(\dot{y})^2 + \frac{k}{m}y\dot{y} = 0$$

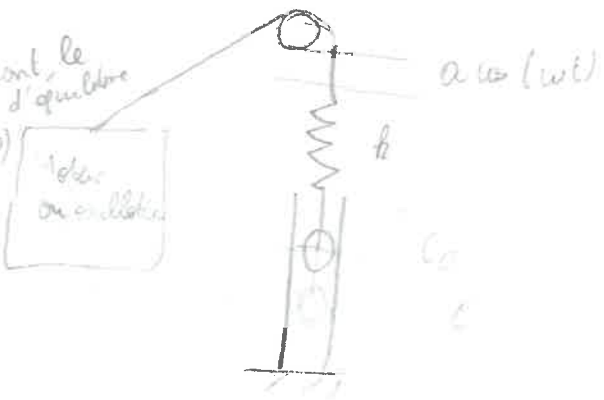
:m puis intégration

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\left(m\dot{y}^2\right)}_{\text{Puissance liée à l'énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{6\pi\mu r}{m}(\dot{y})^2}_{\text{Puissance dampée (non calculable sans le profil de la vitesse)}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k y^2\right)}_{\text{Puissance liée à l'énergie potentielle d'un ressort}} = 0$$

Regime forcé :



ou



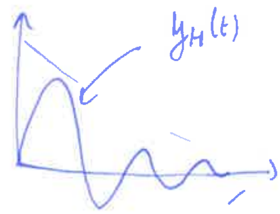
O (en prenant une origine du Referentiel galileen dont le centre est le point d'équilibre de la masse à l(0))

$$m\ddot{y} = -k\left(y - y_{eq} - a\cos(\omega t)\right)_y - \alpha\dot{y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y}_{\text{Resonnateur}} = \underbrace{\frac{k}{m}a\cos(\omega t)}_{\text{Excitateur (réponse forcée)}}$$

Equation différentielle d'ordre 2 avec second membre

$$y_g(t) = y_H(t) + y_p(t)$$



REMARQUE IMPORTANTE : AU BOUT D'UN CERTAIN TEMPS, LA RÉPONSE LIBRE SERA NULLE ET CE NE SERA QUE LA RÉPONSE FORCÉE QUE L'ON OBSERVERA

Détermination de la solution particulière :

- $y_p(t) = a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$, calculs longs !!! ou $y_p(t) = A\cos(\omega t + \underline{\underline{\varphi}})$
- Methode de l'exponentielle complexe

[Youtube (Fermo - La physique expliquée) L'oscillateur - résistance d'élongation]

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}a\cos(\omega t) = \frac{ka}{m}\mathrm{Re}\left[e^{i\omega t}\right]$$

Equation complexe associée : $\underline{y} = y + ix$ (on peut prendre $\underline{x} = x + iy$ si le ressort est étudié sur l'axe $\vec{e_x}$)

$$\ddot{\underline{y}} + \frac{\alpha}{m}\dot{\underline{y}} + \frac{k}{m}\underline{y} = \frac{ka}{m}e^{i\omega t}$$

Dans le cas général ω non racine de $y_H(t)$ ⇒ on va donc s'intéresser aux solutions de la forme $\underline{y_p}(t) = \underline{A}e^{i\omega t}$

$\Rightarrow \dot{\underline{y}}_p(t) = i\omega\,\underline{y_p}(t)$

$\Rightarrow \ddot{\underline{y}}_p(t) = -\omega^2\underline{y_p}(t)$

En injectant ces relations dans l'équation différentielle, on obtient

$$\left(-\omega^2 + i\omega\frac{\alpha}{m} + \underset{\overset{\Vert}{\omega_0^2}}{\frac{k}{m}}\right)\underline{A}\cancel{e^{i\omega t}} = \omega_0^2\, a\,\cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{\omega_0^2\, a}{(\omega_0^2-\omega^2) + i\omega\frac{\alpha}{m}}$$

Rappels mathématiques :

$\underline{A}e^{i\omega t} = |\underline{A}|e^{i(\omega t + \varphi_A)}$

Passage à la partie réelle :

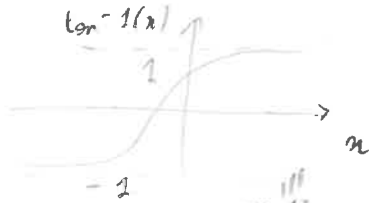
$\mathrm{Re}\left[\underline{A}e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[|\underline{A}|e^{i(\omega t+\varphi_A)}\right]$

$= |\underline{A}|\cos(\omega t + \varphi_A)$

Amplitude de $\underline{A}$: $|\underline{A}| = \dfrac{\omega_0^2\, a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\omega\frac{\alpha}{m}\right)^2}}$

Phase de $\underline{A}$: $\tan(\varphi_A) = \dfrac{-\omega\frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2-\omega^2} = \dfrac{\omega\frac{\alpha}{m}}{\omega^2-\omega_0^2} \Rightarrow \varphi_A = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega\frac{\alpha}{m}}{\omega^2-\omega_0^2}\right)$

$\varphi_A \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



$\Rightarrow y_p = \mathrm{Re}\left[\underline{A}e^{i\omega t}\right] = |\underline{A}|\cos(\omega t + \varphi_A)$

$$= \frac{\omega_0^2\, a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\omega\frac{\alpha}{m}\right)^2}}\cos(\omega t + \varphi_A)$$

$\neq \omega_0$!!!

et $y_g(t) = y_H(t) + y_p(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \dfrac{\omega_0^2\, a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\omega\frac{\alpha}{m}\right)^2}}\cos(\omega t + \varphi_A)$

Etude de $|A| = f(\omega)$

$$|A| = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\frac{\alpha}{m})^2}}$$

Le denominateur s'annule si $(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\frac{\alpha}{m})^2 = 0$

$$\Rightarrow \omega_0^2+\omega^2+2\omega_0\omega+\omega^2\frac{\alpha^2}{m^2}=0$$

$$\Rightarrow \omega^2(1+\frac{\alpha^2}{m^2})+2\omega\omega_0+\omega_0^2=0$$

$$\Rightarrow \omega^2+\frac{2\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}\omega+\frac{\omega_0^2}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}=0$$

$$\Delta = b^2-4ac$$

$$= \frac{4\omega_0^2}{(1+\frac{\alpha^2}{m^2})^2}-\frac{4\omega_0^2}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}} = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{(1+\frac{\alpha^2}{m^2})^2}-\frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}\right)$$

$$= 4\omega_0^2\left(\frac{1-(1+\frac{\alpha^2}{m^2})}{(1+\frac{\alpha^2}{m^2})^2}\right) = 4\omega_0^2\frac{-\frac{\alpha^2}{m^2}}{(1+\frac{\alpha^2}{m^2})^2} < 0$$

$$\omega_1 = \frac{-\frac{\cancel{2}\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}-i\frac{\cancel{2}\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}\frac{\alpha}{m}}{\cancel{2}} \qquad \omega_2 = \frac{-\frac{\cancel{2}\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}+i\frac{\cancel{2}\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}\frac{\alpha}{m}}{\cancel{2}}$$

$$= \frac{\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}\left(-1-i\frac{\alpha}{m}\right) \qquad = \frac{\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}\left(-1+i\frac{\alpha}{m}\right)$$

NE PERMET PAS DE CONCLURE !!!

<u>Autre méthode :</u>

$$|A| = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\frac{\alpha}{m})^2}} = \frac{\frac{\omega_0^2 a}{\omega\alpha/m}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega\frac{\alpha}{m}}\right)^2+1}}$$

le système résonne si $|A| \to +\infty$ => dénominateur de $|A|$ tend vers 0

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega/\alpha m}\right)^2 = -1$$

Ne permet pas de conclure !!!

Solution 1 : Développement limité pour enlever de la racine carrée

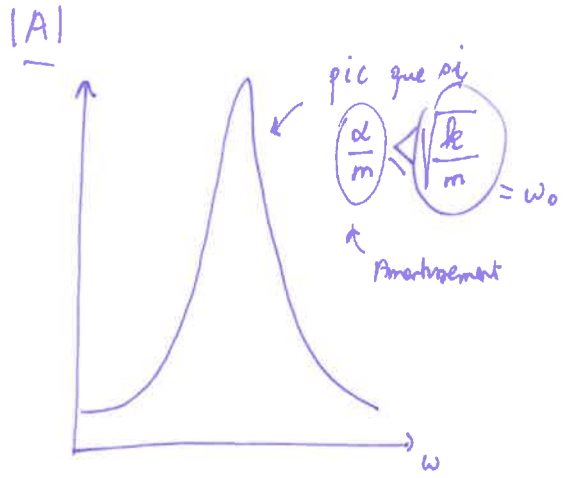
=) limite l'étude à ω proche de ω_0

$$|A| = \frac{\dfrac{\omega_0^2 a}{\omega \frac{\alpha}{m}}}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \frac{\alpha}{m}}\right)^2 + 1}}$$

Pas possible car il ne s'agit pas simplement de $\sqrt{x^2+1}$

Solution 2 : [Youtube (FEMTO - La physique expliquée) / L'oscillateur - résonnance d'élongation]

Tracer la fonction : $|A| = f(\omega)$



IL NE FAUT PAS TROUVER ω POUR QUE LE DÉNOMINATEUR S'ANNULE MAIS ω POUR QUE LE DÉNOMINATEUR SOIT MINIMAL CAR $|A|$ NE DIVERGE PAS !!!

(& EN PLUS LA SOLUTION PARTICULIÈRE A ÉTÉ OBTENUE LORSQUE ω N'EST PAS RACINE DE LA SOLUTION HOMOGÈNE $\equiv \omega \neq \omega_{resonnance}$ SINON CE MODÈLE N'EST PAS VALABLE !!!)

HYPOTHÈSE FAUSSE ???

car $\sqrt{\ }$ est une fonction monotone

$$\min\left(\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2}\right) = \min\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2\right) = \frac{d}{d\omega}\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2\right) = 0$$

$$= \frac{d}{d\omega}\left(\omega_0^2 + \omega^2 - 2\omega_0\omega + \frac{\alpha^2}{m^2}\omega^2\right)$$

$$= -2\omega_0 + 2\omega\left(1+\frac{\alpha^2}{m^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_r = \frac{2\omega_0}{2\left(1+\frac{\alpha^2}{m^2}\right)}}$$

$$\min\left(\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2}\right) = \frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2}\right)=0$$

$$= \frac{+2\omega-2\omega_0+\frac{2\alpha^2}{m^2}\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2}}=0$$

$$= \frac{2\omega\left(1+\frac{\alpha^2}{m^2}\right)}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2}} = \frac{2\omega_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\alpha}{m}\omega\right)^2}}$$

les solutions de ω qui annulent le numérateur sont recherchées

$$\Rightarrow \boxed{\omega_r = \frac{\omega_0}{1+\frac{\alpha^2}{m^2}}} = \omega_0\frac{1}{1+\frac{\alpha^2}{\omega^2}} = \omega_0\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{\omega_0\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2}\right)}{\left(1-\frac{\alpha^2}{m^2}\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{m^2}\right)}$$

$$\text{Si } \frac{\alpha}{m} \ll 1 \Rightarrow \omega_r = \omega_0$$

D'après la littérature [femto-physique.fr / mécanique / oscillateurs harmoniques]

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_0^2-\frac{\alpha^2}{m^2}}} \underset{D.L.}{=} \omega_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\alpha^2}{m^2}\right) = \omega_0\left(1-\frac{1}{2\omega_0^2}\frac{\alpha^2}{m^2}\right)$$

$$\text{Si } \frac{\alpha}{m} \ll \omega_0 \text{ alors } \omega_r = \omega_0$$

$$|A(\omega=\omega_r)| = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{\left(\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2}+\frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2+\frac{\alpha^2}{m^2}\left(\omega_0^2-\frac{\alpha^2}{m^2}\right)}} = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^4-\left(\frac{\alpha}{m}\right)^4+\frac{\alpha^2}{m^2}\omega_0^2}}$$

$$|A(\omega=\omega_r)| = \frac{\omega_0\, a}{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}$$ amortissement

(plus l'amortissement est faible et plus la résonance est prononcée lorsque $\omega=\omega_0$)

Etude de la phase en fonction de la fréquence : $\tan(\varphi) = f(\omega)$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \left]-\pi/2 ; \pi/2\right[$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \in \left]-1, 1\right[$$

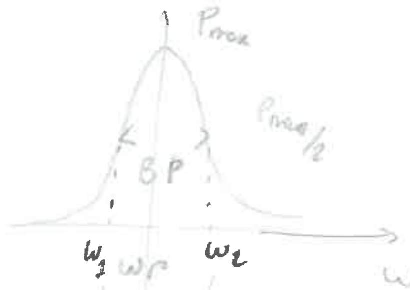
Les pulsations de la bande passante du signal correspondent aux pulsations qui correspondent à la moitié de l'écart de phase maximal, c'est-à-dire :

⚠⚠⚠

$$\frac{\omega_{1,2}\frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2} = \pm\frac{\pi}{4}$$

± 1 DANS LA LITTÉRATURE POUR TROUVER

$$Q = \frac{\omega_R}{\text{Amortissement}} \approx \frac{\omega_0}{\text{Amortissement}}$$

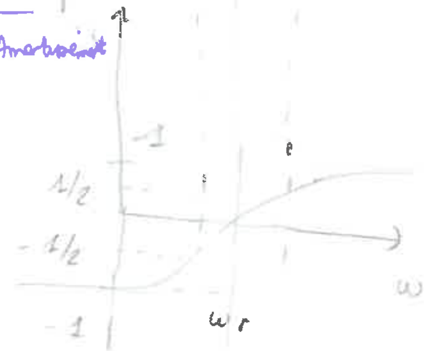


$$\Rightarrow \omega_{1,2}\frac{\alpha}{m} = \pm\frac{\pi}{4}\left(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2\right)$$

$$\Rightarrow \pm\frac{\pi}{4}\omega_{1,2}^2 + \frac{\alpha}{m}\omega_{1,2} \mp \frac{\pi}{4}\omega_0^2 = 0$$

$\div \pm\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 \pm \frac{\alpha}{m}\frac{4}{\pi}\omega_{1,2} - \omega_0^2 = 0$$



Les solutions positives sont :

$$\omega_1 = -\frac{\alpha}{m}\frac{2}{\pi} \oplus \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\frac{2}{\pi}\right)^2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\alpha}{m}\frac{2}{\pi} \oplus \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\alpha}{m}\frac{2}{\pi}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = 2\left(\frac{\alpha}{m}\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\alpha}{m}\frac{4}{\pi} = \Delta\omega$$

ERRONÉ : LA BANDE PASSANTE CORRESPOND AUX FRÉQUENCES OÙ L'AMPLITUDE EST DIVISÉE PAR 2 ET NON PAS OÙ LA PHASE EST DIVISÉE PAR 2 !!!

Par définition le facteur de Qualité du résonateur qui subit une excitation externe

(DONNE LA SENSIBILITÉ DE L'OSCILLATEUR À L'EXCITATION EXTERNE = RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DU SYSTÈME COUPLÉ AUTOUR DE LA FRÉQUENCE DE RÉSONANCE)

fréquence propre (≡ à vide) du résonateur

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} = \frac{\omega_R}{\frac{\alpha}{m}\frac{4}{\pi}} \approx \frac{\omega_0}{\frac{\alpha}{m}\frac{4}{\pi}}$$

Amortissement

→ NORMALEMENT CE TERME N'EST PAS PRÉSENT ET $Q = \frac{\omega_0}{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}$

La bande passante se calcule par rapport à l'amplitude et non pas par rapport à la phase

$$|A(\omega_{1,2})| = \frac{1}{2}|A|_{max} = \frac{1}{2}|A(\omega=\omega_R)| \simeq \frac{1}{2}|A(\omega=\omega_0)|$$

Pour des faibles amortissements

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\omega_0 a}{\frac{\alpha}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0^{2}\cancel{a}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-(\pm\omega_{1,2})^2\right)^2+\left(\pm\omega_{1,2}\frac{\alpha}{m}\right)^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\cancel{\omega_0}\,\cancel{a}}{\frac{\alpha}{m}}$$

$$\Rightarrow 2\omega_0\frac{\alpha}{m} = \sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{1,2})^2\right)^2+\left(\pm\omega_{1,2}\frac{\alpha}{m}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 4\omega_0^2\frac{\alpha^2}{m^2} = \left(\omega_0^2-\pm\omega_{1,2})^2\right)^2+\left(\pm\omega_{1,2}\frac{\alpha}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4\omega_0^2\frac{\alpha^2}{m^2} = \omega_0^2+\omega_{1,2}^2 \mp 2\omega_0\omega_{1,2} + \omega_{1,2}^2\frac{\alpha^2}{m^2}$$

NE PERMET PAS NON PLUS DE CONCLURE !!!

Etude énergétique : (par la dérivée première du mouvement)

À partir de l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}a\cos(\omega t)$$

$\times \dot{y}$

$$\dot{y}\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}(\dot{y})^2 + \frac{k}{m}y\dot{y} = \frac{k}{m}a\cos(\omega t)\,\dot{y}$$

Rappel : $y_g(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + |A|\cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \dot{y}_g(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) - |A|\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2\right) + \frac{\alpha}{m}(\dot{y})^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{2m}y^2\right) = \frac{k}{m}a\cos(\omega t)\dot{y}$$

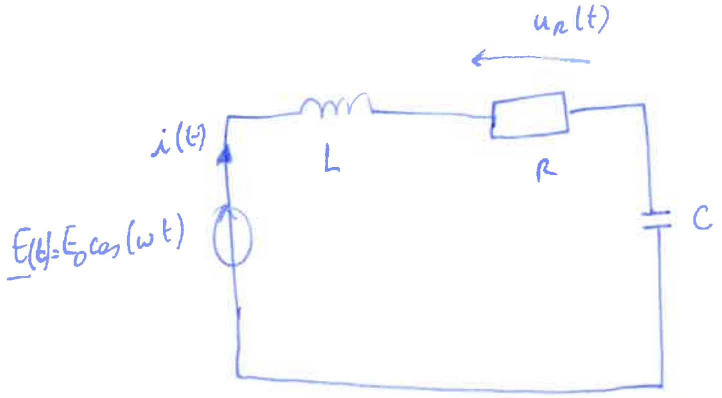
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}ky^2\right) + \alpha(\dot{y})^2 = ka\cos(\omega t)\dot{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2\right) = \underbrace{-\alpha\dot{y}^2}_{\text{Puissance dissipée par frottement}} + \underbrace{ka\cos(\omega t)\dot{y}}_{\text{Puissance injectée par la réponse forcée}}$$

$\Rightarrow$ L'OSCILLATEUR OSCILLE S'IL RÉSONNE, C'EST-À-DIRE SI :

- $\omega_{\text{externe}} \simeq \omega_0 = \omega_0 \pm \frac{\text{Bande Passante}}{2}$
- Puissance injectée $\gg$ Puissance dissipée

Circuit RLC :



⚠ ⚠ ⚠ $i(t)$ non accessible avec un ampèremètre (uniquement la valeur i_{rms} accessible)

$\Rightarrow$ mesure de $i(t)$ se fait par la mesure de $u_R(t)$

$$\underline{i} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L} + \underline{Z_R}}$$

$$= \frac{\underline{E}}{1/jC\omega + jL\omega + R}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1/jRC\omega + j\frac{L}{R}\omega + 1} = \frac{\underline{E}/R}{1+j\left(-\frac{1}{RC\omega} + \frac{L\omega}{R}\right)} \quad \left(= \frac{\underline{E}/R}{1+j\,\frac{-L\omega + LC\omega^2}{LRC\omega}} \right.$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1+j\left(\frac{-1}{RLC\omega} + \frac{LC\omega}{RC}\right)} = \frac{\underline{E}/R}{1+j\left(-\frac{L}{R}\frac{\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega}{RC\omega_0^2}\right)} = \frac{\underline{E}/R}{1+\frac{j}{R}\left(-\frac{L\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega}{C\omega_0^2}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1+\frac{Lj}{CR}\left(-\frac{CL\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega}{CL\omega_0^2}\right)} = \left. \frac{\underline{E}/R}{1+j\frac{L}{CR}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)} \right)$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1+\frac{j}{R}\frac{L}{C}\left(C\omega - \frac{L}{\omega}\right)} = \frac{\underline{E}/R}{1+\frac{j}{R}\frac{L}{C}\left(\frac{LC\omega}{L} - \frac{LC}{C\omega}\right)} = \frac{\underline{E}/R}{1+jQ\left(\frac{\omega}{L\omega_0^2} - \frac{C\omega_0^2}{\omega}\right)}$$

⚠ ⚠ PAS LE BON DÉVELOPPEMENT POUR L'ANALOGIE CAR IL S'AGIT D'UN DÉVELOPPEMENT EN FRÉQUENCES ET NON EN TEMPS

À la place :

Loi des noeuds :

$q = Cu$

$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow q(t) = \int i\,dt$

$$E = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q(t)$$

$$E = R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt} + \frac{1}{C}q(t)$$

$$E = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}q(t)$$

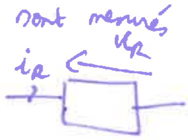
$$\Rightarrow E/L = \ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{=\frac{\omega_0}{Q}}\dot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2}q(t)$$

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q \Rightarrow \varepsilon = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Passage aux énergies :

⚠ ⚠ ⚠ L'énergie (ou la puissance) sont spécifiques à chaque élément du circuit, ils sont mesurés en utilisant le courant qui passe dans l'élément et la tension aux bornes de l'élément



Energie : $U_{x\,\text{element}}\ q_{\text{element}}$

$$\Rightarrow E_{\text{fournie}} = U_{\text{generateur}} \cdot q = R\int q\frac{dq}{dt} + L\ddot{q}q + \frac{1}{C}q^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left(R^2\frac{q^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\dot{q}^2\right) + \frac{1}{C}q^2$$

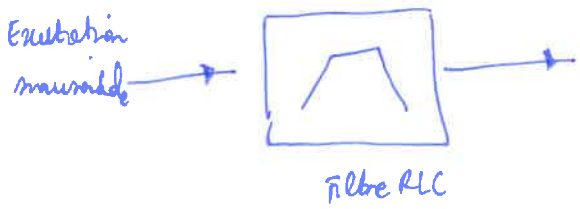
Passage aux puissances à la place :

$$U_{\text{generateur}} \cdot i(t) = Ri(t) \cdot i(t) + L\frac{di}{dt}i(t) + \frac{1}{C}q(t) \cdot i(t) \quad = q(t)\frac{dq(t)}{dt}$$

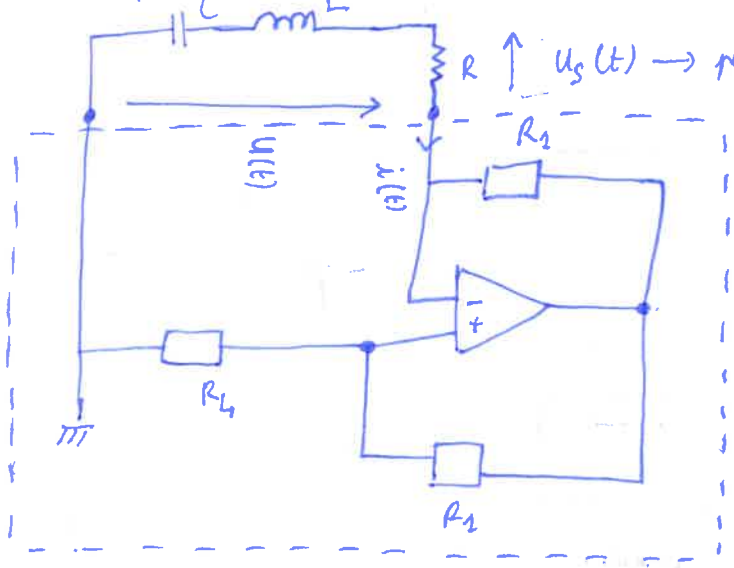
$$\underbrace{U_{\text{générateur}} \cdot i(t)}_{P_{\text{fournie}}} = \underbrace{Ri^2}_{P_{\text{dissipée}}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{P_{\text{inductance}}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2C}q^2\right)}_{P_{\text{condensateur}}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)$$

Pour faire osciller ce montage : ⇒ OBJECTIF : COMPENSER LES PERTES JOULES DANS LA RÉSISTANCE PAR UN APPORT D'ÉNERGIE (≡ "RÉSISTANCE R NÉGATIVE")

- Générateur externe (peu performant car la chaleur peut faire sortir la fréquence du signal envoyée hors de la BP du circuit résonnant)



- Montage avec Résistance négative :



$U_s(t)$ ⟶ permet d'obtenir $i(t)$ et de voir les oscillations

MONTAGE À RÉSISTANCE NÉGATIVE

Expériences :

- Réaliser un oscillateur mécanique avec {moteur (vibrateur) + poulie} dans de l'eau (pour obtenir les frottements visqueux (ou directement dans l'air) et noter l'amplitude des oscillations

⇨ Tracer le diagramme de l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence (UTILISER LATIS PRO → DIAGRAMME DE "BODE" ???)

+ Mesure d'incertitude (type B)

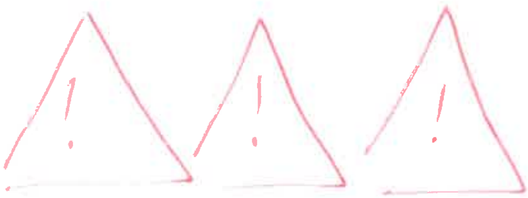
⚠⚠⚠ SAUF CAPACITÉS CÉRAMIQUES, LES AUTRES SONT POLARISÉES !!

- Réaliser un RLC (⚠⚠⚠ AUX VALEURS DE R, L ET C) et tracer l'amplitude en fonction de la fréquence d'entrée

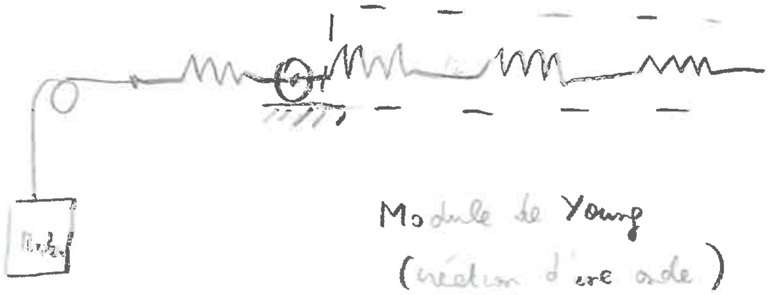
- SIMULER EN LTSPICE (OU RÉALISER) UN MONTAGE À RÉSISTANCE NÉGATIVE !!!

+ FFT
+ Bande Passante

Approfondissement 1 Corde Melde



LE COUPLAGE D'OSCILLATEUR CRÉÉ UNE DISSIPATION DE L'ÉNERGIE SPATIALE (L'ÉNERGIE EST TRANSMISE D'UN OSCILLATEUR À L'AUTRE ⇒ UNE ONDE EST CRÉÉE

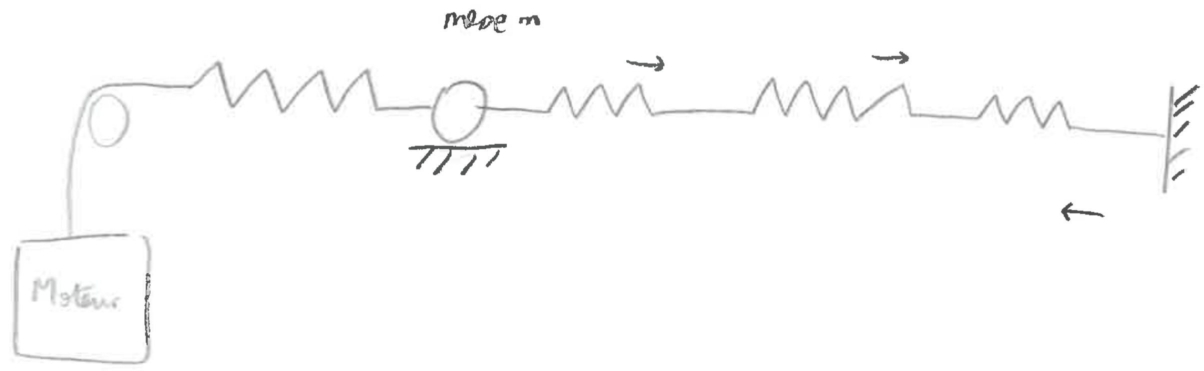


Module de Young
(création d'une onde)

(UNE ONDE PEUT ÊTRE MODÉLISÉE PAR L'ÉNERGIE DISSIPÉE PAR UN COUPLAGE D'OSCILLATEUR SANS FROTTEMENTS)

⇒ L'EXCITATEUR (L'AIM EXTERNE) DOIT DONC COMPENSER :

- LES PERTES DU AUX FROTTEMENTS DE LA MASSE
- LA DISSIPATION D'ÉNERGIE PAR LES OSCILLATEURS COUPLÉS



⚠⚠⚠ Pour que les oscillateurs couplés oscillent, il faut que l'énergie revienne

⇒ il faut une interface à la fin,

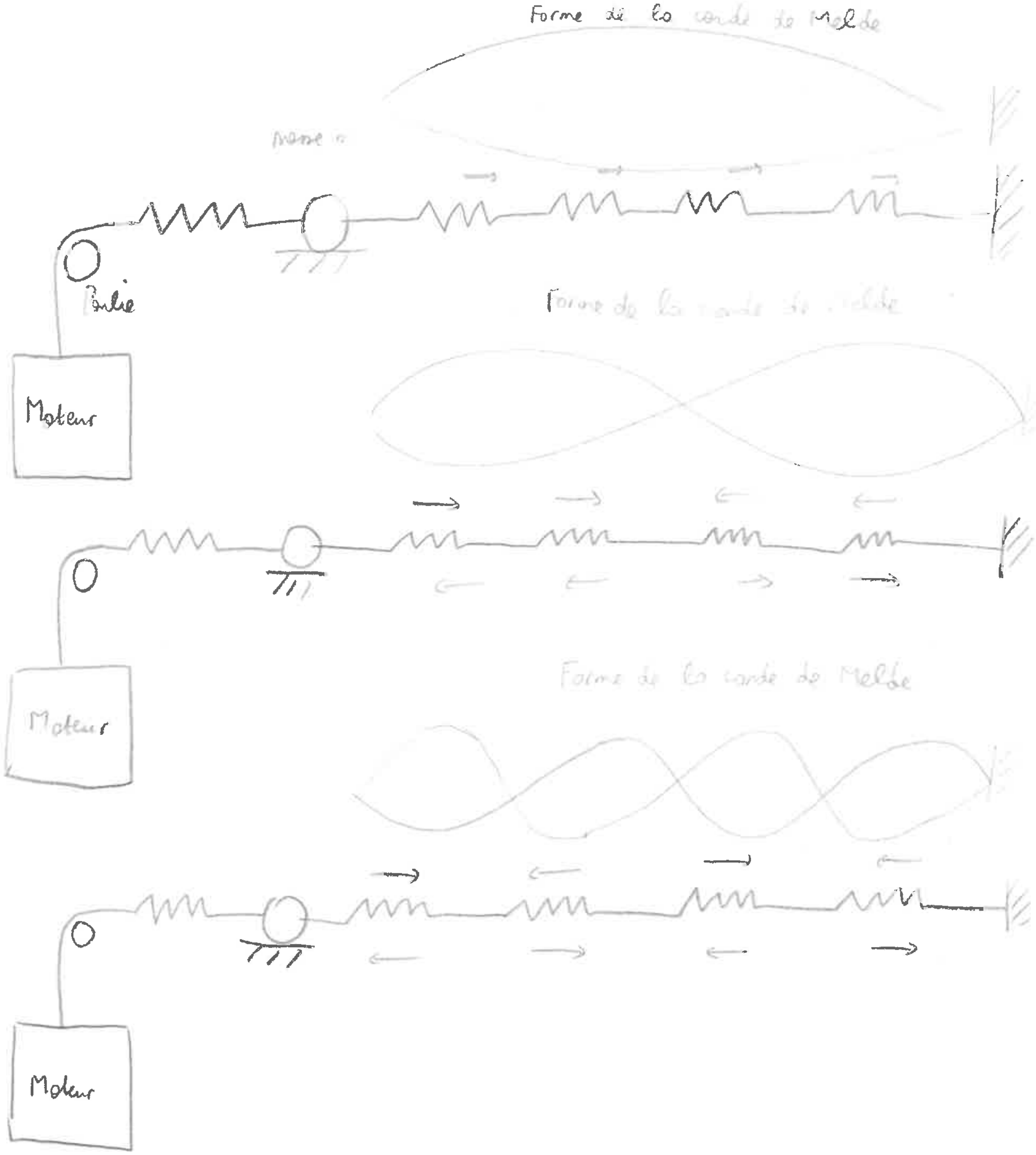
il faut créer une onde stationnaire !!!

⇒ Il faut créer une onde stationnaire !!!

⚠⚠⚠ La fréquence propre des oscillateurs couplés (≡ module de Young (1D), corde de Melde (2D), ...)

n'est pas unique, elle correspond à la fréquence du fondamental (où tous les ressorts vibrent en phase)

et de toutes les harmoniques



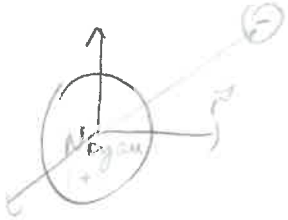
Developpement de la corde de Melde : - [clemde la salle fr /.../ LP 48 Phénomènes de résonnance dans les différents domaines de la physique]

- [perso-ens-lyon fr /.../ LP 48 Phénomènes de résonnance dans les différents domaines de la physique]

Extension 1 : Modèle de Drude de l'électron (loi d'Ohm microscopique) et four à micro-ondes

Développements impossible à [dans les salles fr / . . / LP48 Phénomènes de résonance dans les différents domaines de la physique]

Système
{ électron de masse m et de charge $-e$ }



Référentiel du noyau supposé galiléen et lié en base cartésienne

L'ÉLECTRON LIBRE QUI PARTICIPE AU COURANT S'ÉLOIGNE LINÉAIREMENT DE L'ATOME !!!

$$m_e \ddot{r} = \sum \vec{F}_{ext}$$ (PAS DE FORCES FICTIVES DANS LE MODÈLE)

⚠ ⚠ ⚠ LA BASE NE DOIT PAS AVOIR DE ROTATION PAR RAPPORT À LA BASE CARTÉSIENNE (SINON INTRODUCTION DE FORCES FICTIVES !!!)

$$m_e \ddot{r} = -\underbrace{m_e \omega_0^2 r}_{\text{force de rappel du noyau}} - \underbrace{\frac{m_e \dot{r}}{\tau}}_{\text{frottement fluide}} - e \vec{E}_{ext} + \underbrace{e\,\vec{\dot{r}} \wedge \vec{B}_{ext}}_{\text{négligeable devant la force de Coulomb électrique}}$$

(le métal est une mer d'électrons)

On reconnaît la formule d'un oscillateur harmonique forcé par un champ $\vec{E}_{externe}$

$r_g(t) = r_h(t) + r_p(t) \longrightarrow$ Après un temps très court : $r_h(t) \to 0 \Rightarrow r_g(t) = r_p(t)$
(RÉGIME PERMANENT)

$$\Rightarrow r_p(t) = \frac{\omega_0^2\, e\,|\underline{E_{ext}}|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow |\underline{Z}| = \frac{|\vec{E}_{ext}|}{|\vec{j}|} = \frac{|\vec{E}_{ext}|}{|\rho \cdot \vec{\dot{r}}|} = \frac{|\vec{E}_{ext}|}{\rho|\vec{\dot{r}}|}$$

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ (pour un courant de conduction)

$\Rightarrow |Z| = f(\omega)$

Notamment $|Z|_{eau} = f(\omega)$ exploité pour le four à micro-onde (montrer la courbe !!!)

Extension 2

Cavité de Fabry - Perot permet d'augmenter la résolution des interférences obtenues par l'interféromètre de Michelson