Acoustique

Euler : $\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}(P)$ (1)

Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ (2)

compressibilité

Equation d'état (équation entre les variables d'état) : χ

χ_T : compressibilité isotherme (pas de changement de température lors du passage de l'onde)

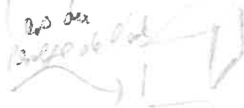
$$\chi_S \hat{=} \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S \quad (3)$$

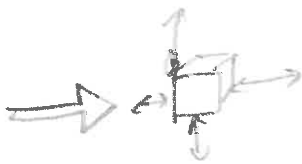
compressibilité isentropique (pas d'échange de chaleur lors du passage de l'onde)

masse = constante $= \rho V$

$\Rightarrow dm = 0 = d\rho V + \rho dV$

$\Rightarrow -\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}$





dV est comprimé / dilaté

$\Rightarrow$ la Température change mais ce changement n'est pas transmis à l'ensemble du milieu

Hypothèse des faibles perturbations de l'équilibre : $\rho_1(\vec{r},t)\ (= d\rho(\vec{r},t)) \ll \rho_0$

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \underbrace{\rho_1(\vec{r},t)}_{\text{petite perturbation}}\ (= \rho_0 + d\rho(\vec{r},t)) \text{ avec } \\ P(\vec{r},t) = P(z) + P_1(\vec{r},t) \\ \vec{v}(\vec{r},t) = \vec{0} + \vec{v}(\vec{r},t) \end{cases}$$

LINÉARISATION DES 3 ÉQUATIONS À L'ORDRE PLUS BAS NON NUL.

$$(1) \Rightarrow (\rho_0 + \rho_1)\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = (\rho_0+\rho_1)\vec{g} - \vec{\nabla}P - \vec{\nabla}P_1$$

$$\Rightarrow \rho_0\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) + \rho_1\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \underbrace{\rho_0\vec{g} - \vec{\nabla}P_0(z)}_{=\vec{0}} + \rho_1\vec{g} - \vec{\nabla}P_1$$

Trop petit (perturbation d'une perturbation)

$$\Rightarrow \boxed{\rho_0\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = \cancel{\rho_1\vec{g}} - \vec{\nabla}P_1} \quad (4)$$

APPROXIMATION ACOUSTIQUE

Ordre 2

$$(2) \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}}_{=0} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \underbrace{\vec{v}\,\vec{\nabla}(\rho_0+\rho_1)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = 0} \quad (5)$$

Par définition

$$(3) \Rightarrow \chi_s = \frac{1}{(\rho_0+\rho_1)} \cdot \frac{\rho(\vec{r},t)-\rho_0}{P(\vec{r},t)-P_0} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial P_1} \Rightarrow \boxed{\rho_1 \chi_s = \rho_0 P_1} \quad (6)$$

Par définition

$$(4) \Rightarrow \rho_0 \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = \rho_0 \frac{\partial (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}(P_1)\right) \quad (6)$$

$$(5),(6) \Rightarrow -\frac{\rho_0}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = -\Delta P_1$$

$$\Rightarrow -\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\Delta P_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta P_1 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{avec } c^2 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

Une fois qu'on a une relation sur ρ ou P ou $\vec{v}$, les relations sur les autres termes peuvent être facilement obtenues.

P et ρ sont liés par une relation linéaire : $\rho_1 = \rho_0 P_1 \chi_s$

P et $\vec{v}$ sont liés par l'équation d'Euler linéarisée.

Gaz parfait : $PV = nRT$ $\left(\text{Remarque } PV = nRT \Rightarrow P = \rho \frac{RT}{M_A}\right)$

Pour une évolution isentropique, la relation des gaz parfait devient : $PV^\gamma = \text{constante}$

$$V = \frac{m}{\rho} \Rightarrow PV^\gamma = \text{constante} = \frac{P m^\gamma}{\rho^\gamma} = \text{constante} \Rightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{\text{constante}}{m^\gamma} = \text{constante}'$$

Ainsi $P = \text{constante}' \rho^\gamma$

$$\Rightarrow dP = \text{constante}' \gamma \rho^{\gamma-1} d\rho$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dP} = \frac{1}{\text{constante}' \gamma \rho^{\gamma-1}} = \frac{\rho}{\gamma P} \longrightarrow \chi_s = \frac{1}{\gamma P}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} = \sqrt{\frac{\gamma P_{atm}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{air}}} \quad \text{A.N. (à } 27^\circ C) \quad c_{air} = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}314 \times 300}{29 \times 10^{-3}}}$$