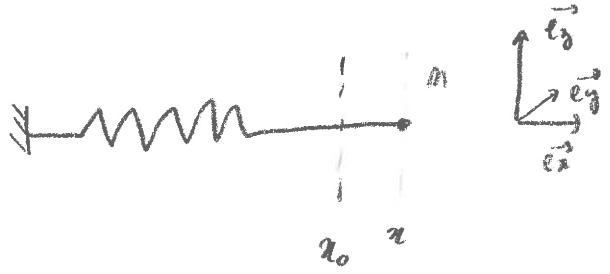
⚠ ⚠ ⚠ UN SEUL RESSORT : SYSTEME OSCILLANT DANS LE TEMPS

(⇒ MATHEMATIQUEMENT DECRIT PAR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE TEMPORELLE D'ORDRE 2)



Système : { masse m attachée au ressort }

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

Principe fondamental de la Dynamique

$$m \times \vec{a} = \sum \vec{F_{ext}} = \vec{F_{Rappel}} + \underbrace{\vec{Poids}}_{\text{Négligeable}}$$

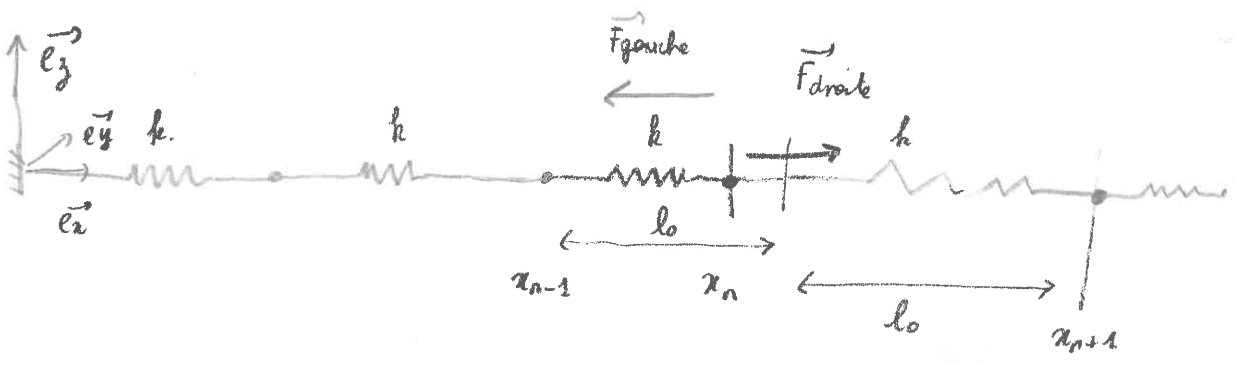
$$\Rightarrow m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

$$\Rightarrow m x'' + k x = k x_0$$

PLUSIEURS RESSORTS : SYSTEME OSCILLANT DANS L'ESPACE ET DANS LE TEMPS

(⇒ MATHEMATIQUEMENT DECRIT PAR UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE 2

⇒ EQUATION DE D'ALEMBERT ⇒ FONCTION D'ONDE (MECANIQUE)



Système : { masse m entre 2 ressort à une position x_n du centre du repère }

Référentiel terrestre supposé Galiléen

$$\vec{F_{gauche}} = -k\,(x_n - x_{n-1} - l_0)\,\vec{e_x}$$

$$\vec{F_{droite}} = k\,(x_{n+1} - x_n - l_0)\,\vec{e_x}$$

Rappel sur les dérivées première et seconde.

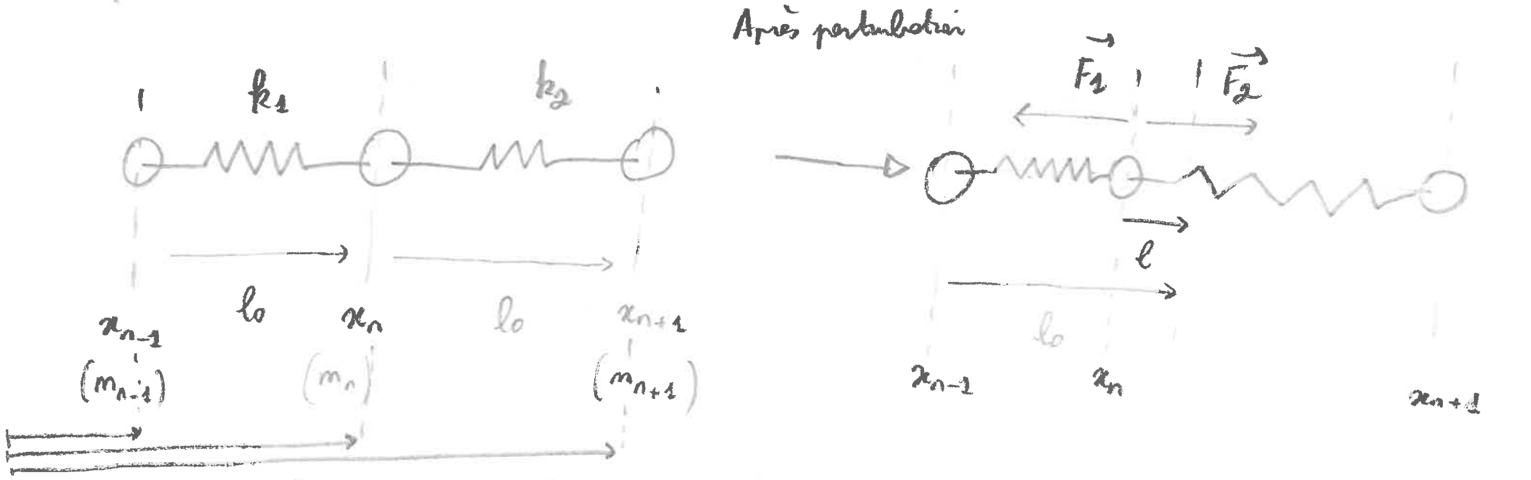
Soit f une fonction ne dépendant que d'une seule variable t : $(f(t))$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t} = \frac{\frac{\partial (f(t+dt))}{\partial t} - \frac{\partial f(t)}{\partial t}}{\partial t} = \frac{\partial f(t+dt) - \partial f(t)}{\partial t^{2}}$$

<u>Applications :</u>

- Spatialement pour les force de rappel



Système {masse m à la position x_n du ressort après perturbation}

TOUJOURS METTRE LA PLUS GRANDE DISTANCE AU DÉPART CAR LA RÉACTION EST DONNÉE PAR LA PROJECTION DE LA FORCE

$$m\vec{a} = \sum \vec{F_{ext}} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$= + k_1 \left((x_n - x_{n-1}) - l_0 \right) \vec{e_x} - k_2 \left(x_{n+1} - x_n - l_0 \right) \vec{e_x}$$

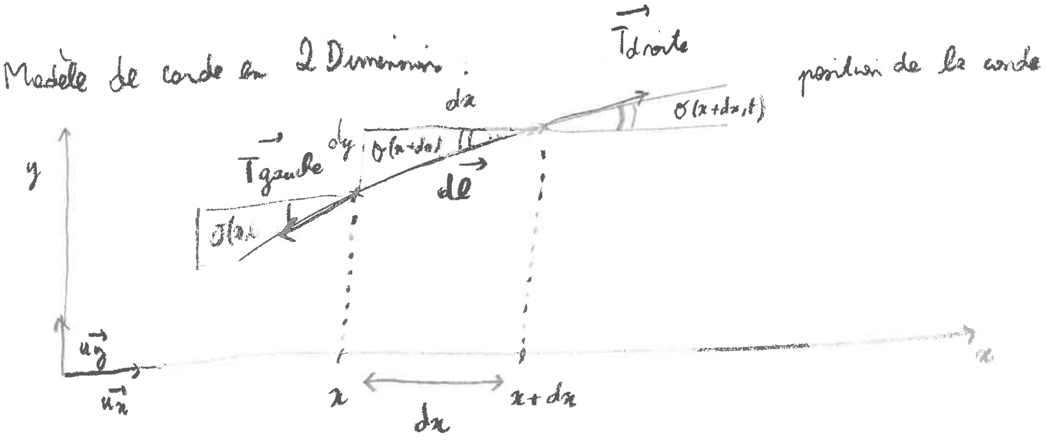
Rappel : force de rappel d'un ressort :

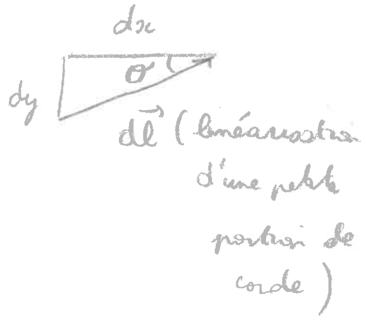
$F_{rappel} = -k \Delta \vec{r}$

Projection sur $\vec{e_x}$: $$m \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = +k \left(x_n - x_{n-1} - l_0 \right) - k \left(x_{n+1} - x_n - l_0 \right)$$

$$m \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = -k \left(\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{\text{dérivée première}} - \underbrace{(x_n - x_{n-1})}_{\text{dérivée seconde}} \right) = -k \frac{\partial^2 x_n}{\partial n^2}$$

Modèle de corde en 2 Dimensions :





Système : { portion de corde entre x et $x+dx$ }

Référentiel terrestre supposé Galiléen

Principe fondamental de la dynamique (appliqué au système) :

$$m \times \vec{a} = \vec{T}_{gauche}(x,t) + T_{droite}(x+dx,t)$$

$$m = \mu \times d\ell = \mu\sqrt{dx^2+dy^2} = \mu\, dx\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}} = \mu\, dx\sqrt{1+\tan^2(\theta)} \simeq \mu\, dx \text{ pour des petits angles}$$

masse linéique

ASTUCE 1 POUR FAIRE APPARAÎTRE LA DIFFÉRENTIELLE SPATIALE D'ORDRE 2 :

INTRODUIRE UN dx GRÂCE À LA MASSE LINÉIQUE MAIS PAS DE dy !!!

ASTUCE 2 POUR FAIRE APPARAÎTRE LA DIFFÉRENTIELLE SPATIALE D'ORDRE 2 : EXPRIMER LES ANGLES EN FONCTION DE LA POSITION (EN RÉALITÉ IL N'Y A PAS BESOIN D'INDICES SUR LES T (T_{gauche} et T_{droite}) SUFFIT POUR CETTE DÉMONSTRATION)

Projection dans la base cartésienne (repère absolu) :

$$\begin{cases} \underbrace{\mu\, dx}_{m} \times \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -T(x,t)\cos(\theta(x,t)) + T(x+dx,t)\cos(\theta(x+dx,t)) & \text{sur } \vec{e_x} \\ \underbrace{\mu\, dx}_{m} \times \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t)\sin(\theta(x,t)) + T(x+dx,t)\sin(\theta(x+dx,t)) & \text{sur } \vec{e_y} \end{cases}$$

Objectif à atteindre : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \sim \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Pour des petits angles $\theta(x,t) \longrightarrow 0$ et $\theta(x+dx,t) \longrightarrow 0$, en faisant des Developpements limités d'ordre minimal aboutissant à des résultats non nuls :

$\Rightarrow \cos(\theta(x,t)) \simeq 1$ et $\cos(\theta(x+dx,t)) \simeq 1$

et

$$\sin(\theta(x,t)) \simeq \theta(x,t) = \frac{dy(x)}{dx} \quad \text{et} \quad \sin(\theta(x+dx),t) \simeq \theta(x+dx,t) \simeq \frac{dy(x+dx)}{dx}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\mu\, dx \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} \simeq T(x,t) - T(x+dx,t) \\[2ex] -\mu\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq T(x,t) \times \dfrac{dy(x)}{dx} - T(x+dx,t) \times \dfrac{dy(x+dx)}{dx} \end{cases}$$

ASTUCE 3 POUR FAIRE APPARAÎTRE LA DIFFÉRENTIELLE SPATIALE D'ORDRE 2 :

L'ACCÉLÉRATION SUR $\vec{e_x}$ EST NULLE : LES FORCES DE TENSION SE COMPENSENT SUR dx CAR : $T(x+dx,t)$ NE PEUT PAS ÊTRE SUPÉRIEURE À $T(x,t)$ (PAS D'ADDITION D'ÉNERGIE ET SI $T(x+dx,t) < T(x,t)$ ALORS LE PHÉNOMÈNE DIMINUE DE PROCHE EN PROCHE (CAS DE L'ONDE ÉVANESCENTE)

⚠⚠⚠ SI $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ CELA NE SIGNIFIE PAS QU'IL N'Y A PAS DE MOUVEMENT EN x : $v_x = \dfrac{\partial x}{\partial t} \neq 0$!!!

Alors : $0 = T(x,t) - T(x+dx,t) \Rightarrow T(x,t) = T(x+dx,t) = T_0$

En injectant ce résultat dans l'équation de y :

$$+\mu\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq T_0 \left(\frac{dy(x+dx) - dy(x)}{dx} \right)$$

sur dx

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq T_0 \frac{dy(x+dx) - dy(x)}{dx^2} = T_0 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

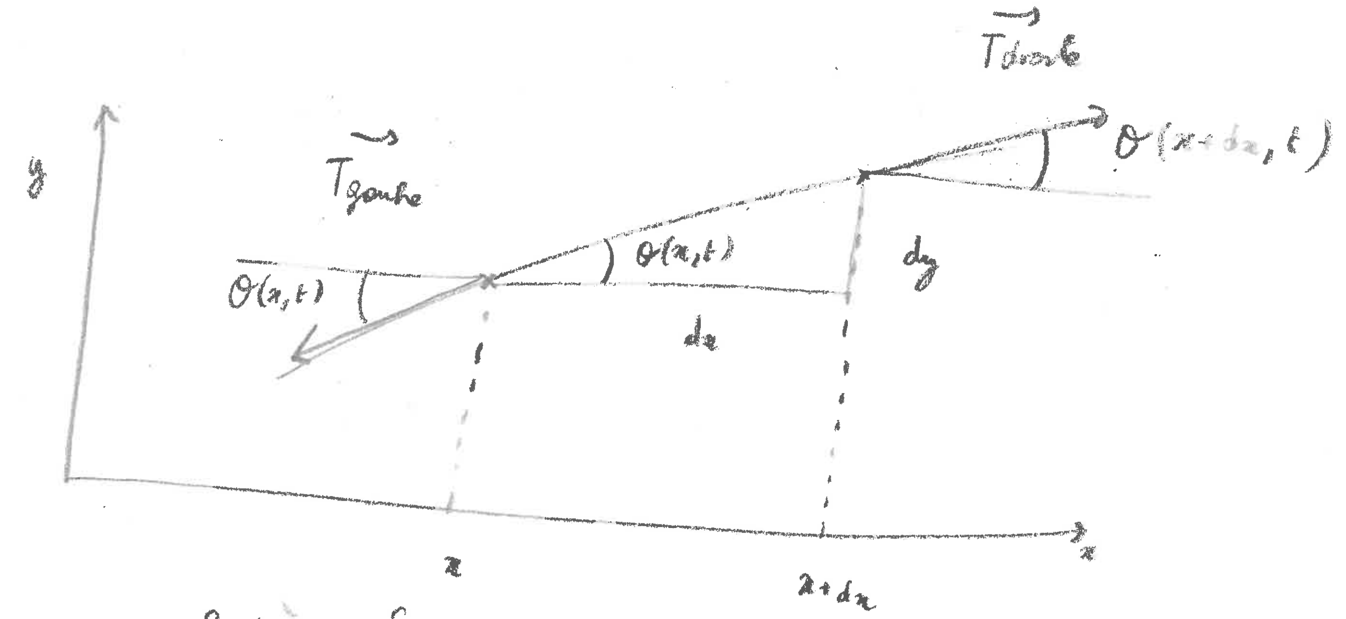
$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \simeq \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{= c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{(equation de De D'Alembert)}$$

Cependant cette démonstration suppose que $\tan(\theta) \simeq \theta \simeq 0$ pour obtenir $dl = dx$ et ensuite considère que angles ($\theta(x,t)$ et $\theta(x+dx,t)$) qui sont par la suite supposés non nuls

$\Rightarrow$ Démonstration mathématiquement peu rigoureuse ?!?

Autre démonstration possible :



Système = { portion de corde entre x et x + dx }

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

NE PAS UTILISER UN MODÈLE DE RESSORT 2 DIMENSIONS, MAIS UTILISER 4 ASTUCES NÉCESSAIRES POUR ÉTABLIR LE RÉSULTAT :

1) EXPRIMER dx, dy, dl et θ EN FONCTION DES VARIABLES SPATIALES ET TEMPORELLES

→ $dx(x,t)$, $dy(x,t)$, $dl(x,t)$, $\theta(x,t)$

(Tdroite et Tgauche ne nécessitent pas une expression de leur norme en fonction de x et de t)

2) EXPRIMER m EN FONCTION DE LA MASSE LINÉIQUE PERMETTANT D'OBTENIR dx

3) POUR QUE L'ONDE PUISSE SE PROPAGER SANS S'ATTÉNUER (ET COMME ELLE NE PEUT PAS S'AMPLIFIER SANS SOURCE D'ÉNERGIE : $T_{droite} = T_{gauche}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

⚠ ⚠ ⚠ ET NON PAS : $\theta = \frac{y}{x}$ MAIS $\theta = \frac{dy}{dx}$!!!

si $dx \ll x$

4) $$\theta(x+dx,t) - \theta(x,t) = \frac{dy(x+dx,t)}{dx(x+dx,t)} - \frac{dy(x,t)}{dx(x,t)} \simeq \frac{dy(x+dx) - dy(x,t)}{x+dx-x}$$

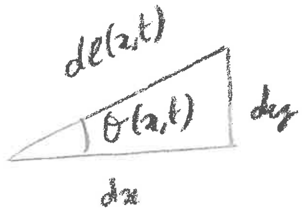
IL EST DIFFICILE DE TROUVER UNE ABSTRACTION PLUS GRANDE DE CETTE DÉMONSTRATION SANS PROSCRIRE LA BASE, PAR EXEMPLE D'OBTENIR LES RÉSULTATS EN FONCTION DE $d\theta$ PLUTÔT QUE DE $\theta(x+dx,$ $-\theta(x,$

Principe Fondamentale de la Dynamique : (relation vectoriel)

$$m\vec{a} = \vec{T}_{droite} + \vec{T}_{gauche} \Rightarrow \mu\, dl\, \vec{a} = \vec{T}_{droite} + \vec{T}_{gauche}$$

Projection sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$:

$$\begin{cases} \mu\, dl(x,t)\, \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T_{droite} \cos(\theta(x+dx,t)) - T_{gauche} \cos(\theta(x,t)) \\ \mu\, dl(x,t)\, \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_{droite} \sin(\theta(x+dx,t)) - T_{gauche} \sin(\theta(x,t)) \end{cases}$$



$$dl(x,t) \cos(\theta(x,t)) = dx(x,t) \Rightarrow \frac{dx(x,t)}{\cos(\theta(x,t))} = dl(x,t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu \dfrac{dx(x,t)}{\cos(\theta(x,t))} \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T_{droite} \cos(\theta(x+dx,t)) - T_{gauche} \cos(\theta(x,t)) \\ \mu \dfrac{dx(x,t)}{\cos(\theta(x,t))} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_{droite} \sin(\theta(x+dx,t)) - T_{gauche} \sin(\theta(x+dx,t)) \end{cases}$$

En supposant que les angles $\theta(x,t)$ et $\theta(x+dx,t)$ sont petits, des Developpements limités autour de 0 et d'ordre minimal conduisant à des resultats non nuls peuvent être appliqués :

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu\, dx(x,t) \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T_{droite} - T_{gauche} \\ \mu\, dx(x,t) \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_{droite}\, \theta(x+dx,t) - T_{gauche}\, \theta(x,t) \end{cases}$$

En prenant $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow T_{droite} = T_{gauche}$, ce qui conduit à la simplification du système précédent :

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{droite} = T_{gauche} = T_0 \\ \mu\, dx(x,t) \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \left(\theta(x+dx,t) - \theta(x,t) \right) \end{cases}$$

Puis en remplaçant $\theta(x+dx,t) - \theta(x,t)$ par $\frac{y(x+dx,t)}{x+dx} - \frac{y(x,t)}{x} \overset{\text{si } dx \ll x}{\simeq} \frac{y(x+dx,t)-y(x,t)}{\cancel{x}+dx-\cancel{x}}$

$$\Rightarrow \mu\, dx(x,t) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{dy(x+dx,t) - dy(x,t)}{dx} \right)$$

$$\Rightarrow \mu\, dx \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{d^2y(x,t)}{dx^2} \right)$$

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{d^2y(x,t)}{dx^2}$$

EN RÉALITÉ, IL NE S'AGIT PAS DE LA DIFFÉRENTIELLE TOTALE MAIS QUE DE LA DÉRIVÉE PARTIELLE PAR RAPPORT À LA VARIABLE x

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

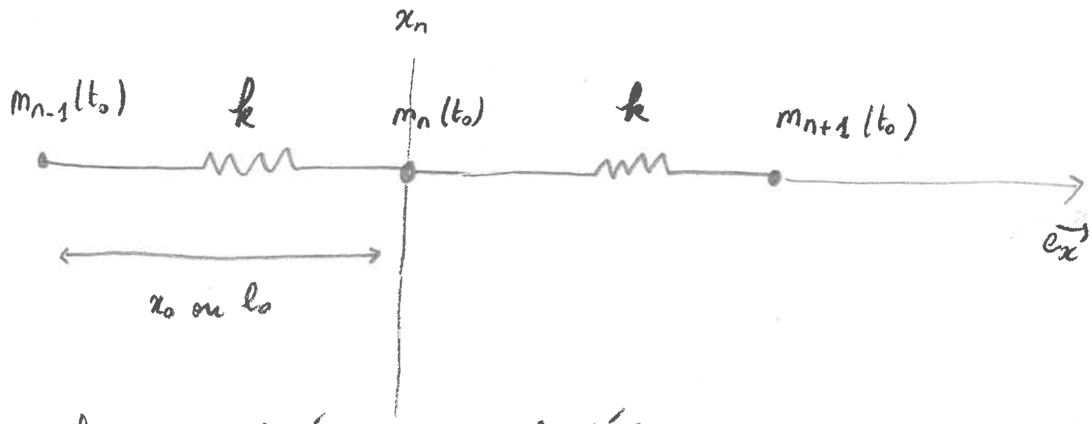
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{T_0}{\mu}}_{= c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

L'équation de D'Alembert peut être obtenue, la corde a donc un comportement ondulatoire sur la dimension y

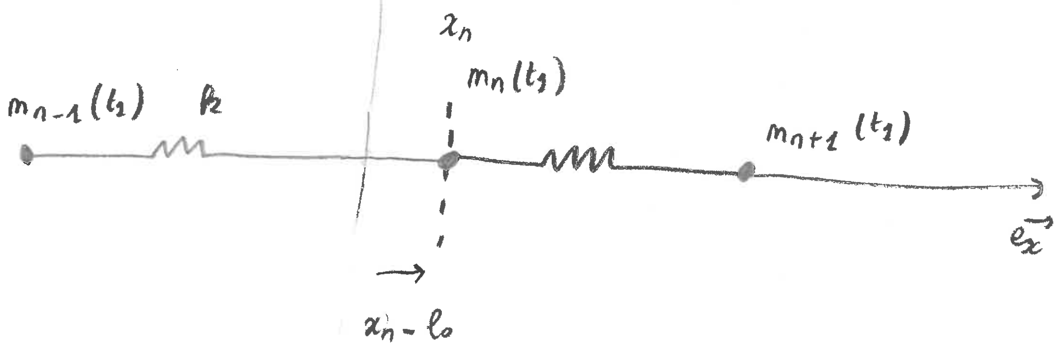
Ondes mécaniques en plusieurs dimensions

- 1 Dimension . module de Young .

A $t = t_0$



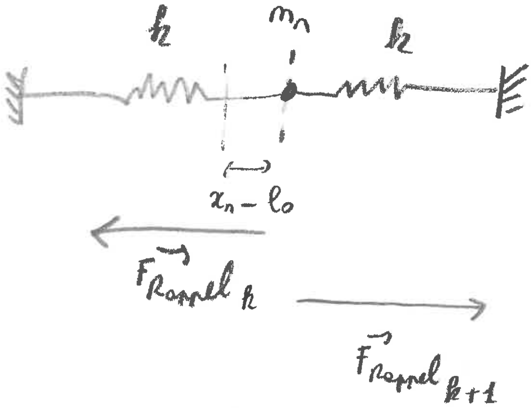
A $t > t_0$ une force est appliquée à m_n qui le déplace temporairement vers la droite



⚠ ⚠ ⚠ DANS TOUT SYSTÈME MÉCANIQUE, IL EST FONDAMENTAL DE PRÉCISER LE SYSTÈME ÉTUDIÉ ET LE RÉFÉRENTIEL D'ÉTUDE

Système : $\{$ masse m_n $\}$ (à une position non pas x (qui est la variable d'espace mais x_n (qui est la position sur $\vec{e_x}$ de la masse n !!!)

Référentiel Terrestre supposé Galiléen



D'après la Seconde loi de Newton (≡ PRINCIPE FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE):

$$\sum \vec{F_{ext}} = m_n \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_{Rappel_k} + \vec{F}_{Rappel_{k+1}} = m_n \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{F}_{Rappel} = -k \Delta x \cdot \vec{e_x}$$

$$\Rightarrow \cancel{m\vec{g}} - k_n (x_n - x_0) \vec{e_x} + k_{n+1} (x_0 - x_n) \vec{e_x} = m_n \frac{d\vec{v}}{dt} = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

négligeable devant les autres forces

⚠ ⚠ ⚠ NE PAS CONFONDRE LA VARIABLE x AVEC LA POSITION DU SYSTÈME x_n !!!

Projection sur l'axe $\vec{ex}$:

$$\Rightarrow -k(x_n - x_0) + k(x_0 - x_n) = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

$$-\left(k(x_n - dx) - k(x_n - dx)\right) = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

En prenant $k_n = k_{n+1} = k$ et $x_0 = dx$ (tout petit accroissement élémentaire)

$$\Rightarrow +k\left((x_n + dx) - (x_n - dx)\right) = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

$$\Rightarrow +k \times 2dx_n = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

⚠ ⚠ ⚠ MÊME SI LA POSITION DU SYSTÈME EST NOTÉ x_n, x_n EST CONTINUE ET NON DISCRÈTE CAR $x_0 \neq k x_n$!!!

⚠ ⚠ ⚠ LA SIMPLIFICATION CONDUIT À $2dx_n$

ET EN CONTINU : $d^2 x_n = 2dx_n$

AINSI EN CONTINU : $2dx_n = d^2 x_n = \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^2} . d^2 x$

(IL NE FAUT PAS SIMPLIFIER À CETTE ÉTAPE MAIS REMPLACER PAR LA DÉRIVÉE PARTIELLE SECONDE !!!)

$$\Rightarrow +k\left((x_n + dx) - (x_n - dx)\right) = -k \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^2} d^2 x = m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

$$\Rightarrow +\frac{k}{m_n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^2} . d^2 x = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

$$d^2 x = x_0^2 = l_0^2$$

$$\Rightarrow +\frac{k}{m_n} . (d^2 x) \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{+\frac{k}{m_n} l_0^2}_{= c^2} \Delta x_n = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

MATHÉMATIQUEMENT, LA DIFFÉRENTIELLE CONTINUE DONNE :

$$dx = (x + dx) - x$$

$$d^2 x = ((x + dx) - x) - (x - (x - dx))$$

$$d^2 x = 2dx$$

ET LA DIFFÉRENTIELLE DISCRÈTE DONNE :

$$dn = (n+1) - (n)$$

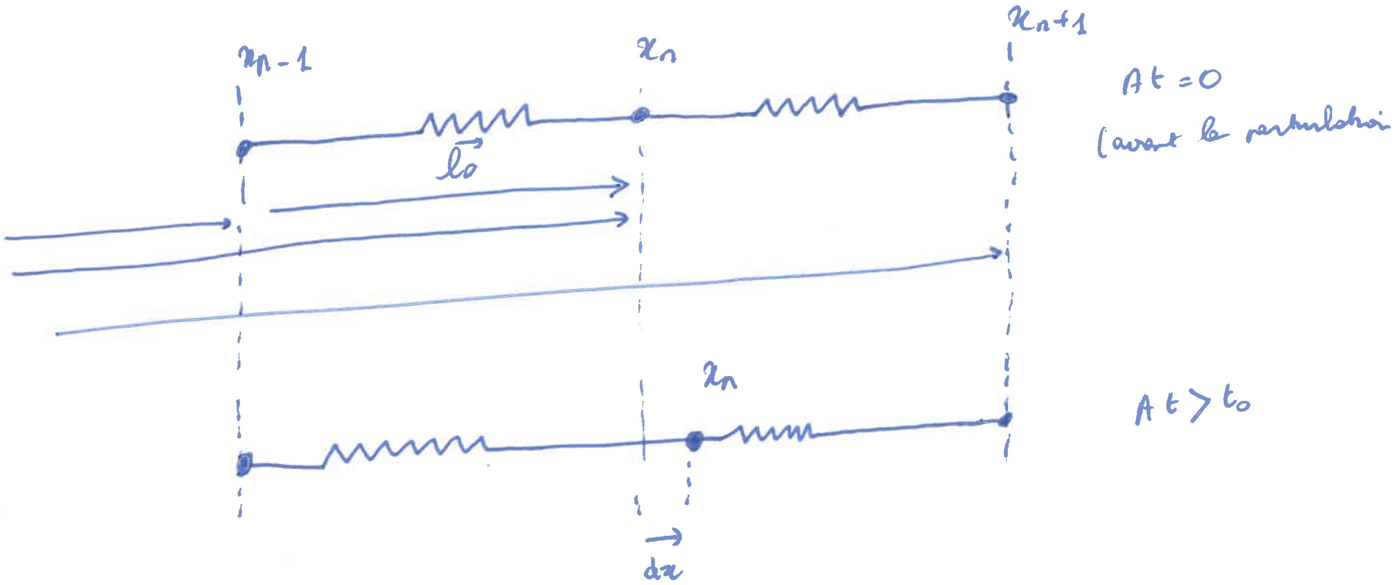
$$d^2 n = ((n+1) - n) - (n - (n-1))$$

$$d^2 n = (n+1) + (n-1) - 2n$$

$$d^2 n = 0 \ ???$$

- Modèle 3 : POUR OBTENIR UNE DÉRIVÉE SECONDE AVEC 2 RESSORTS, IL FAUT DÉJÀ UNE DÉRIVÉE PREMIÈRE AVEC 1 RESSORT

Solution : FAIRE PARTIR LES MESURES DES x_n DU DÉPART DE L'AXE ($\vec{e_x}$) ET DÉCRIRE LES CHANGEMENTS DE POSITION D'ÉQUILIBRE (LES dx) À L'AIDE DES DISTANCES x_{n+1} ET x_n (OU x_n ET x_{n-1} EN FONCTION DES RESSORTS) !!!



Avant la perturbation : $\vec{F_{ressort}} = -k.\vec{l_0}$ pour les ressorts droits et gauche

Après la perturbation : $\vec{F_{ressort}}\Big|_{gauche} = -k.(l_0 - dx_g).\vec{e_x}$

$\vec{F_{ressort}}\Big|_{droit} = +k(l_0 - dx_d).\vec{e_x}$

IL FAUT ENSUITE EXPRIMER LES dx EN FONCTION DE x_{n+1}, x_n ET x_{n-1} :

$$dx_g = x_n - x_{n-1} - l_0$$

$$dx_d = x_{n+1} - x_n - l_0$$

=> Après la perturbation :

$$\vec{F_{ressort}}\Big|_{gauche} = -k(l_0 - dx_g).\vec{e_x} = -k(l_0 - (x_n - x_{n-1} - l_0)).\vec{e_x}$$

$$\vec{F_{ressort}}\Big|_{droit} = +k(l_0 - dx_d).\vec{e_x} = +k(l_0 - (x_{n+1} - x_n - l_0)).\vec{e_x}$$

Correction du développement précédent :

Le développement précédent est erroné car la célérité obtenue est $c^2 = \frac{k}{m} l_0^2$

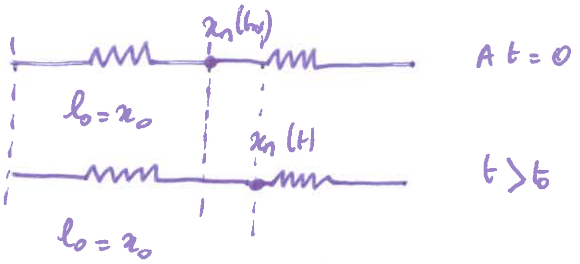
ce qui ne correspond pas à la célérité mesurée expérimentalement : $c^2 = \frac{k}{m}$

Les erreurs commises sont les suivantes :

$-\left(k(x_n - x_0) - k(x_n + x_0)\right)$ ne donne pas $\left(k(x_n - dx) - k(x_n + dx)\right)$

car $x_0 = l_0$ correspond à la distance du ressort au repos mais à $k(dx) - k(2dx)$

- Modèle 1 :



$\vec{F}_{ressort}\big|_{gauche} = -k(x_n - x_0)\cdot\vec{e_x}$ et $\vec{F}_{ressort}\big|_{droite} = k(x_n - x_0)\cdot\vec{e_x}$

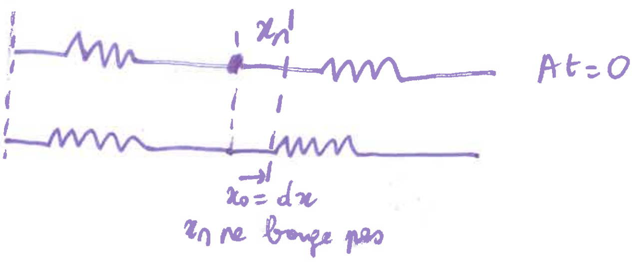
$\Rightarrow$ Dans ce modèle les 2 forces s'annulent

Si $\vec{F}_{ressort}\big|_{gauche} = -k(x_n - x_0).\,\vec{e_x}$ et $\vec{F}_{ressort}\big|_{droite} = k(x_0 - x_n)\cdot\vec{e_x}$

$= -k(x_n - x_0)\cdot\vec{e_x}$

$\Rightarrow$ Dans ce modèle les 2 forces des ressorts s'ajoutent

- Modèle 2 : Si x_n immobile et x_0 correspond à la perturbation (dx) alors il n'est pas possible d'obtenir une équation où x_n change (dans l'espace et dans le temps)



Deux résolutions possibles :

- Résolution purement continue :

$$\vec{F}_{ressort}\Big|_{gauche} = -k(l_0 - dx_g) \cdot \vec{e_x}$$

$$\vec{F}_{ressort}\Big|_{droit} = +k(l_0 - dx_d) \cdot \vec{e_x}$$

En appliquant la seconde loi de Newton (= LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA MÉCANIQUE) :

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big|_{\mathcal{E}} = m\vec{a}\Big|_{\mathcal{E}} = m \frac{d\vec{v}_{|\mathcal{E}}}{dt}$$

→ Négligeable dans l'étude du mouvement mais les ressorts s'affaisseraient

$$\Rightarrow \vec{F}_{ressort}\Big|_{gauche} + \vec{F}_{ressort}\Big|_{droit} + \cancel{\vec{P}} = m \frac{d\vec{v}_{\mathcal{E}}}{dt}$$

Projection sur $\vec{e_x}$ uniquement :

$$-k(l_0 - dx_g) + k(l_0 - dx_d) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d x_n^2}{dt^2}$$

$$\Rightarrow k(dx_g - dx_d) = m \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

$$\Rightarrow k\, d^2 x_n = m \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

$$\Rightarrow k \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^2} \cdot (d_x^2) = m \frac{d^2 x_n}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} dx^2 \frac{\partial^2 x_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} dx^2 \, \Delta x_n = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} \frac{dm^2}{\rho^2} \Delta x_n = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

Deux solutions :

- Pas de masse en x_{n-1} et x_n $\Rightarrow d^2 x = 1$ (résolution pseudo-continue)

- Continuum de masse (linéique) entre x_{n-1} et x_n

$\rho = \frac{m}{\Delta e}$ ρ est constant !!! $\Rightarrow \rho = \vec{\nabla}(m) \cdot \vec{u_e}$

$dm = \rho \cdot dx \Rightarrow m = \int dm = \int \rho \, dx = \rho L$!!!

$\Rightarrow dx = \frac{dm}{\rho} \Rightarrow dx^2 = \frac{dm^2}{\rho^2}$

- Résolution pseudo-continue (pas de masse entre x_{n-1} et x_n, $\forall x_n$!!!)

$$\vec{F}_{ressort|gauche} = -k\left(2l_0 - (x_n - x_{n-1})\right) \cdot \vec{e_x}$$

$$\vec{F}_{ressort|droite} = k\left(2l_0 - (x_{n+1} - x_n)\right) \cdot \vec{e_x}$$

En appliquant la Seconde loi de Newton (≡ PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE) :

$$\sum \vec{F}_{ext}\Big|_{\mathcal{E}} = m\vec{a}\Big|_{\mathcal{E}} = m\frac{d\vec{v}|_{\mathcal{E}}}{dt}$$

Négligeable car sinon les ressorts s'affaisseraient

$$\Rightarrow \vec{F}_{ressort}|_{gauche} - \vec{F}_{ressort}|_{droite} + \cancel{\vec{P}} = m\vec{a}|_{\mathcal{E}} = m\frac{d\vec{v}|_{\mathcal{E}}}{dt}$$

Projection sur l'axe $\vec{e_x}$: (CAR LA PERTURBATION SE FAIT SUR L'AXE $\vec{e_x}$ DONC L'ONDE SERA DIRIGÉE SUR L'AXE $\vec{e_x}$ ET SE PROPAGERA (≡ DIRECTION DE LA PHASE) AUSSI SUR L'AXE $\vec{e_x}$ POUR UNE ONDE LONGITUDINALE)

$$\Rightarrow -k\left(2l_0 - (x_n - x_{n-1})\right) + k\left(2l_0 - (x_{n+1} - x_n)\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2x_n}{dt^2}$$

x_n correspond à la position de la masse m_n donc à la position du système ($x_n \cdot \vec{e_x} = \vec{OM}$)

Position du centre du référentiel

Position de m_n dans le référentiel

$$\Rightarrow -k\left((x_{n+1} - x_n) - (x_n - x_{n-1})\right) = m\frac{d^2x_n}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -k\frac{\partial^2 x_n}{\partial n^2} \cdot d^2n = m\frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

$dn = 1$ en discret (écart de 1 entre 2 masses m_n)

$\Rightarrow d^2n = 1$

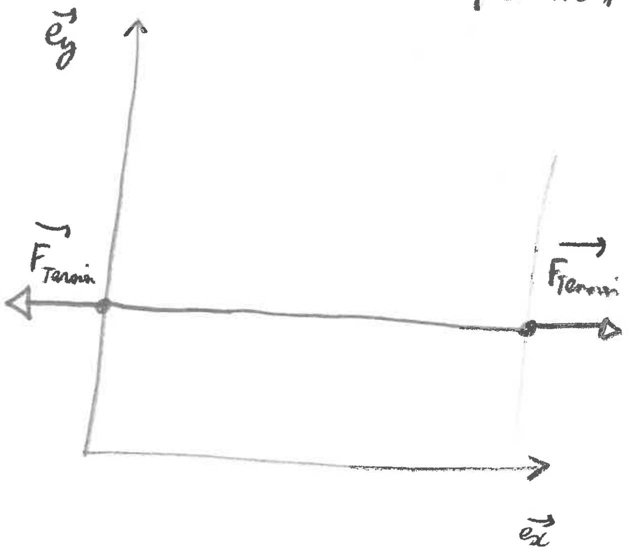
$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{k}{m}}_{c^2}\frac{\partial^2 x_n}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2}$$

Pourquoi la célérité est complexe ??? $\Rightarrow$ atténuation obligatoire ???

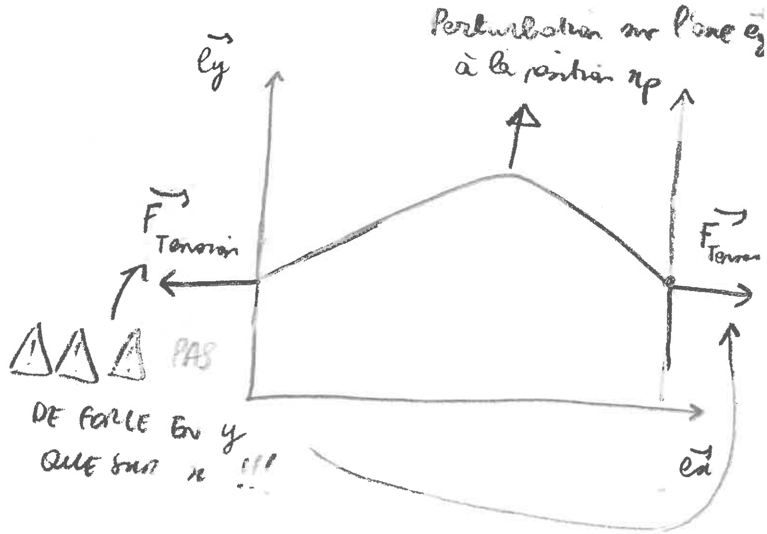
$$c^2 = -\frac{k}{m} = (i)^2\frac{k}{m} \Rightarrow c = \sqrt{(i)^2\frac{k}{m}} = i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- 2 dimensions : onde qui se propage sur une corde

Corde de masse linéique μ $\left(= \frac{m}{dl}\right)$ dont on applique 2 forces de Tension aux deux extrémités. Puis on applique une perturbation sur l'axe $\vec{e_y}$ (pour créer une onde transversale)

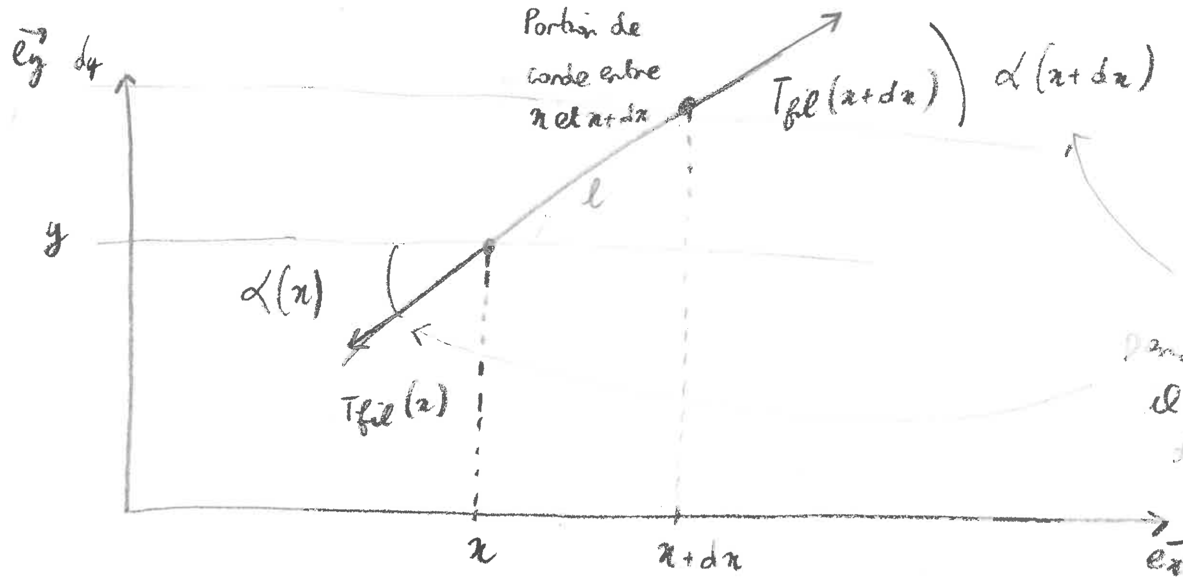


A $t < t_0$



A $t = t_0$

ZOOM AUTOUR DE LA POSITION x DE LA CORDE (= POSITION QUELCONQUE DE LA CORDE) :



Dans le cas général il ne s'agit pas des mêmes angles !!! Car cela dépend du motif de l'onde

⚠ ⚠ ⚠ IL FAUT BIEN DÉFINIR LE SYSTÈME :

- LE SYSTÈME DOIT AVOIR UNE MASSE
- IL PEUT S'AGIR D'UN POINT PONCTUEL OU D'UN VOLUME DÉLIMITÉ

⇒ DANS LE CAS COMME LA CORDE A UNE MASSE LINÉIQUE, LE SYSTÈME NE PEUT PAS ÊTRE UN POINT FIXE MAIS UNE PORTION DE LA CORDE

Système : $\{$ portion de la corde entre x et $x+dx$ $\}$

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

En appliquant la Seconde Loi de Newton ($\equiv$ PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE) :

$$\sum \vec{F}_{ext}\big|_{\Sigma} = m\,\vec{a}_{\Sigma}$$

$$\Rightarrow \vec{T}_{fil}(x) + \vec{T}_{fil}(x+dx) + \vec{P} = m\,\frac{d\vec{v}_{\Sigma}}{dt}$$

Projection sur les axes $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$:

$$\mu \times \ell = \mu\sqrt{dx^2+dy^2}$$

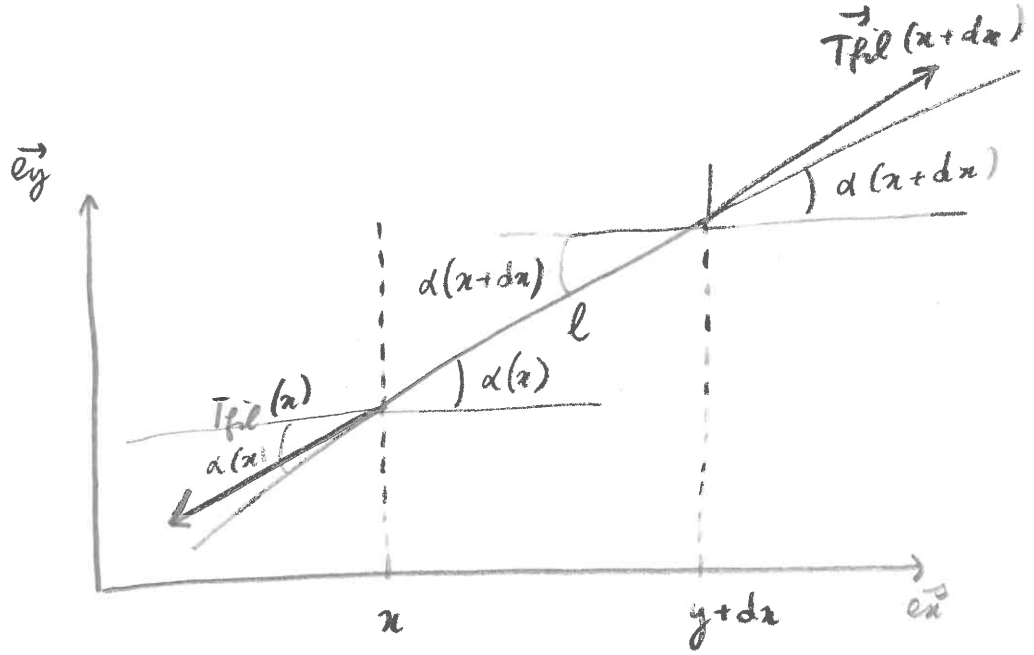
$$\begin{cases} -T_{fil}(x)\cos(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\cos(\alpha(x+dx)) = m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} & (\text{sur } \vec{e_x}) \\ -T_{fil}(x)\sin(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) - mg = m\,\dfrac{d^2y}{dt^2} & (\text{sur } \vec{e_y}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T_{fil}(x)\cos(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\cos(\alpha(x+dx)) = \mu\ell\,\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ -T_{fil}(x)\sin(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) - \mu\ell g = \mu\ell\,\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{cases}$$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$ (pas d'accélération en y ($\equiv$ pas de force en y), juste une perturbation initiale)

Si dx est très petit, la portion de corde entre x et $x+dx$ peut être linéarisée

$\Rightarrow$ $\alpha(x) = \alpha(x+dx)$ (angles alternes internes si la corde entre x et $x+dx$ est une droite



$$\Rightarrow \begin{cases} \left(T_{fil}(x+dx) - T_{fil}(x)\right)\cos(\alpha) = \rho l \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \left(T_{fil}(x+dx) - T_{fil}(x)\right)\sin(\alpha) - \rho l g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(T_{fil}(x+dx) - T_{fil}(x)\right)\dfrac{dx}{l} = \rho l \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \left(T_{fil}(x+dx) - T_{fil}(x)\right) = \dfrac{\rho l g}{\sin(\alpha)} = \dfrac{\rho l g}{dy/l} = \dfrac{\rho l^2 g}{dy} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho l g}{dy} dx = \cancel{\rho l} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \left(T_{fil}(x+dx) - T_{fil}(x)\right) = \dfrac{\rho l^2 g}{dy} \end{cases}$$

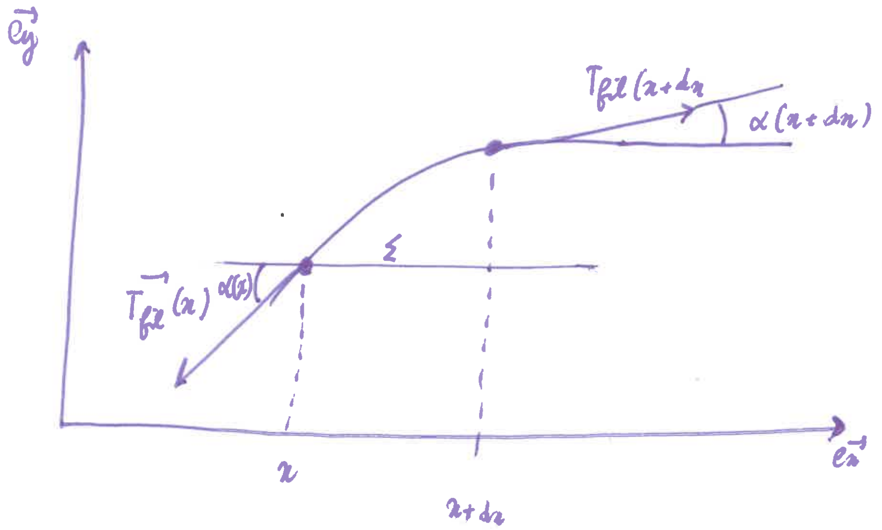
LE PRÉCÉDENT MODÈLE EST ERRONÉ EST COMPORTE PLUSIEURS ERREURS :

- $m = \mu dl \cancel{\approx} \mu \frac{dy}{dx}$ $\left(dl \neq \frac{dy}{dx}\right.$ mais $dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2 + dx^2(\tan\alpha)^2}$

$= dx\sqrt{1+\tan\alpha^2} \xrightarrow[\text{D.L. de } \tan(x)]{} dx\sqrt{1+\alpha^2} \simeq dx \Big)$

$\Rightarrow m = \mu dl \approx \mu dx$

- les angles $\alpha(x)$ et $\alpha(x+dx)$ ne sont pas égaux car sinon les changements de direction de la corde ne seraient pas pris en compte, il s'agit de la véritable variable du système

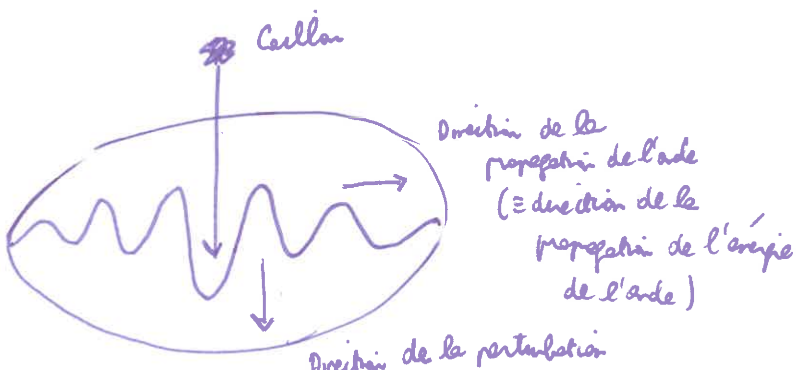


- L'accélération est nulle non pas sur $\vec{e_y}$ mais sur $\vec{e_x}$ car il s'agit d'une onde transversale

__Exemple__ : pour une Onde Plane Progressive Harmonique de description mathématique : $\vec{\Psi} = \vec{\Psi_0}\, e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$

Direction et norme de l'onde associée à sa perturbation

Direction de la propagation de l'onde



$\left(\equiv \text{DIRECTION DE L'ONDE} : \vec{\Psi} = \vec{\Psi_0} \cdot \text{scalaire} !!! \right)$

⇒ POUR UNE ONDE (OPPH) DE DESCRIPTION MATHÉMATIQUE :

$$\Psi = \overrightarrow{\text{Perturbation}} \cdot \underbrace{e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}}$$

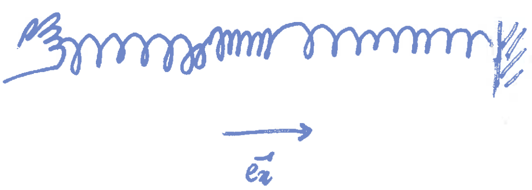
Phase de l'onde (scalaire) QUI REPRÉSENTE COMMENT L'ONDE CHANGE (S'ATTÉNUE) LORSQU'ELLE SE DÉPLACE DANS L'ESPACE ET DANS LE TEMPS (TERME PROPAGATION)

Direction de l'onde = direction de la perturbation de l'onde ($\Psi . \vec{e_\Psi} = \Psi_0 . \vec{e_{\Psi_0}} \times \alpha$
$\Rightarrow \vec{e_\Psi} = \vec{e_{\Psi_0}}$)

Direction de la propagation de l'onde = direction de la phase de l'onde (dans la direction $\vec{r}$)

Ainsi ;

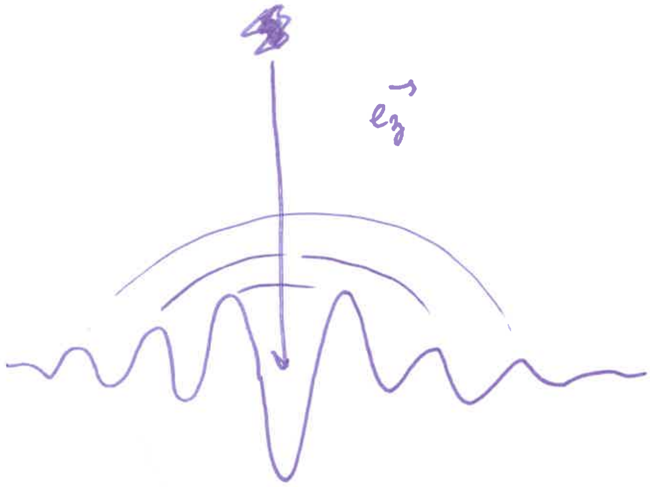
- POUR UNE ONDE (OPPH) LONGITUDINALE :



Direction de la perturbation = direction de l'onde = $\vec{e_x}$

Direction de la propagation de l'onde = direction de la phase = $\vec{e_x}$

- POUR UNE ONDE (OPPH) TRANSVERSALE :



Direction de la perturbation = direction de l'onde : suivant $\vec{e_z}$

Direction de la propagation = direction de la phase de l'onde : dans le plan $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$

L'ÉQUATION DE DE D'ALEMBERT EST UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI PERMET DE FORME MATHÉMATIQUE : $\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi \left(\Leftrightarrow \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial \vec{r}^2} \right)$

- D'OBTENIR UNE RELATION SUR LA PHASE (≡ LA PROPAGATION DE L'ONDE) :

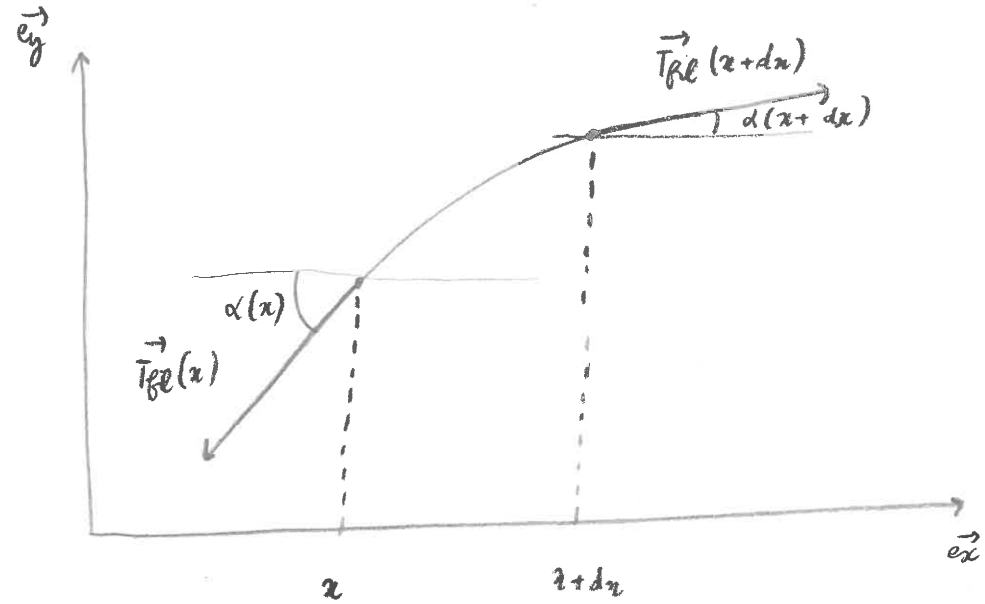
$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \vec{f}(\vec{r} - ct) + \vec{f}(\vec{r} + ct)$$

- DE CONSERVER AUSSI LA DIRECTION DE L'ONDE (≡ LA DIRECTION DE LA PERTURBATION) CAR IL S'AGIT D'UNE RELATION VECTORIELLE !!!

Ainsi : $\frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial r^2}$ avec ψ se projetant sur le plan $(\vec{e_x}, e_y)$ et $\vec{r}$ se projetant sur $\vec{e_x}$

ou $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{x^2}$ SONT DES ONDES TRANSVERSALES !!! ALORS QUE $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = c^2$ EST UNE ONDE LONGITUDINALE !!!

En reprenant le cas de la corde vibrante



Système : {portion de corde entre x et $x+dx$}

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

Masse de la corde : $m = \mu\, dl = \mu \sqrt{dx^2+dy^2} = \mu\sqrt{dx^2+dx^2\tan^2(\alpha)} = \mu\, dx\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$

$m \simeq \mu\, dx \sqrt{1+\alpha^2} \simeq \mu\, dx$ (en obtenant un résultat qui conserve dy, le résultat final sera probablement le même)

En appliquant la Seconde loi de Newton (≡ PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE) :

$$\sum \vec{F_{ext}}_{|\Sigma} = m\,\vec{a}_{|\Sigma} = m\,\frac{d\vec{v}_{|\Sigma}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{T_{fil}}(\vec{x}) + \vec{T_{fil}}(x+dx) + \vec{P} = m\,\frac{d\vec{v}_{|\Sigma}}{dt}$$

Projection sur $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T_{fil}(x)\cos(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\cos(\alpha(x+dx)) = \mu\, dx\,\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ \\ -T_{fil}(x)\sin(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) - \mu\, dx\, g = \mu\, dx\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

En négligeant le poids et notant que :

$\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \rightarrow$ pas de perturbation en $\vec{e_x}$ (juste un changement de phase de l'onde en $\vec{e_x}$ car il s'agit d'une onde transversale)

$$\Rightarrow \begin{cases} -T_{fil}(x)\cos(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\cos(\alpha(x+dx)) = 0 \\ \\ -T_{fil}(x)\sin(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) = \rho\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

$\alpha(x) \neq \alpha(x+dx)$ dans le cas général (permet de modéliser les variations de direction de la corde)

Chaque équation est associée à une relation, donc en appliquant le D.L. à $\cos(\alpha)$ pour des petits angles, une relation entre $T_{fil}(x)$ et $T_{fil}(x+dx)$ (normes des forces de tension du fil en x et $x+dx$) peut être obtenue :

$$\Rightarrow \begin{cases} -T_{fil}(x) + T_{fil}(x+dx) = 0 \Rightarrow T_{fil}(x) = T_{fil}(x+dx) = T_{fil} \quad (1) \\ \\ -T_{fil}(x)\sin(\alpha(x)) + T_{fil}(x+dx)\sin(\alpha(x+dx)) = \rho\, dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2) \end{cases}$$

En appliquant le D.L à $\sin(\alpha)$ (approximation des petits angles) alors l'équation (2) devient :

$$T_{fil}\left(\alpha(x+dx) - \alpha(x)\right) = \rho\, dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{fil}}{\rho} \frac{(\alpha(x+dx) - \alpha(x))}{dx} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{fil}}{\rho} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

De plus $\tan \alpha = \dfrac{dy}{dx}$ et en appliquant l'approximation des petits angles à $\tan(\alpha)$ $\left(= \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \underset{DL}{\longrightarrow} \dfrac{\alpha}{1}\right)$,

$$\Rightarrow \tan(\alpha) \underset{D.L.}{\longrightarrow} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{fil}}{\rho} \frac{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{fil}}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$c^2 =$