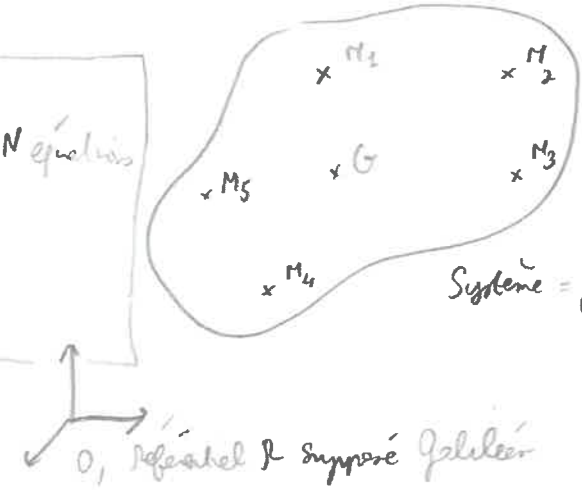
Leçon 2 : Lois de conservation en dynamique :

1) Principe fondamentale de la Dynamique

- Système à N points matériels (chaque point étant associé à une masse)
- Étudié dans le Référentiel Galiléen

$$\boxed{\text{PFD : } \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{f_i}^{ext} + \vec{f_i}^{int} \rightarrow N \text{ équations} \qquad = \vec{f_i}^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f_{ij}}}$$



Système = { masse m_Σ répartie en différents points }

O, Référentiel R supposé Galiléen

Pour simplifier on somme les N équations.

$$\frac{d\vec{p}(\Sigma)}{dt} = \sum \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \sum \vec{f_i}^{ext} + \underbrace{\sum \sum_{j \neq i} \vec{f_{ij}}}$$

$\sum \frac{d(m_i \vec{v_i})}{dt}$ $\qquad$ $\vec{R}^{ext}$ (Résultante des forces extérieures) $\qquad$ $\vec{0}$ (D'après le Principe des Actions Réciproques)

De plus en appliquant le théorème du centre d'inertie :

$$m_\Sigma \vec{OG} = \sum m_i \vec{OM_i} \quad \left(\Rightarrow \sum m_i \vec{GM_i} = \vec{0} \right)$$

Et en dérivant par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt}\left(m_\Sigma \vec{OG}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i \vec{OM_i}\right)$$

$$\Rightarrow m_\Sigma \frac{d\vec{OG}}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{OM_i}}{dt}$$

$$\Rightarrow m_\Sigma \vec{v_G} = \sum m_i \vec{v_{OM_i}}$$

Système fermé

$$\Rightarrow \frac{dp(\Sigma)}{dt} = \frac{d(m_G \vec{v_G})}{dt} = \frac{dm_G}{dt}\vec{v_G} + m_G \frac{d\vec{v_G}}{dt} = \boxed{m_G \frac{d\vec{v_G}}{dt} = \vec{R}^{ext}}$$

Théorème du centre d'inertie (2nd loi de Newton ???)

Passage aux énergies

PFD : $\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{f_i}^{ext} + \sum_{i \neq j} \vec{f_i}^{int} \longrightarrow$ N équations

Travail associé à ces forces (Intégration sur le chemin parcouru)

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{p_i}}{dt} \cdot \vec{dr_i} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f_i}^{ext} \cdot \vec{dr_i} + \int \sum_{i \neq j} \vec{f_{ij}}^{int} \cdot \vec{dr_{ij}}$$

En sommant toutes ces forces

$$\underbrace{\sum_{\mathcal{C}} \int \frac{d\vec{p_i}}{dt} \cdot \vec{dr_i}}_{} = \underbrace{\sum \int_{\mathcal{C}} \vec{f_i}^{ext} \cdot \vec{dr_i}}_{W^{ext}} + \underbrace{\sum \int \sum_{i \neq j} \vec{f_{ij}}^{int} \cdot \vec{dr_{ij}}}_{W^{int}}$$

(si les particules ont des chemins différents, ce travail n'est pas nul !!)

$$= \int_{\mathcal{C}} \sum_i \frac{d\vec{p_i}}{dt} \cdot \vec{dr_i}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{p_G}}{dt} \cdot \vec{dr_G} \qquad \vec{v_G} = \frac{\vec{p_G}}{m_G}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \vec{dp_G} \cdot \frac{\vec{p_G}}{m_G}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{p_G^2}{m_G} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2} m_G v_G^2 \right]_1^2 = W^{ext} + W^{int}$$

$$\boxed{\Delta E_c = W^{ext} + W^{int}}$$

Si le travail interne est nul, ce terme est nul (cas des chocs élastiques)

Rappel $\vec{f}^{ext} = \vec{f}^{ext}_{conservatives} + \vec{f}^{ext}_{non\ conservatives}$

$$\Delta E_c = \sum \int \vec{f_i}^{ext} \cdot \vec{dr_i} + 0$$

$$= \sum \int \left(\vec{f_i}^{ext}\Big|_{conservatives} + \vec{f_i}^{ext}\Big|_{non\ conservatives} \right) \cdot \vec{dr_i}$$

$$= \underbrace{\sum \int \vec{f_i}^{ext}\Big|_{conservatives} \cdot \vec{dr_i}}_{-\Delta E_p} + \underbrace{\int \vec{f_i}^{ext}\Big|_{non\ conservatives} \, dr_i}_{\Delta E_M}$$

$\Rightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p + \Delta E_M$

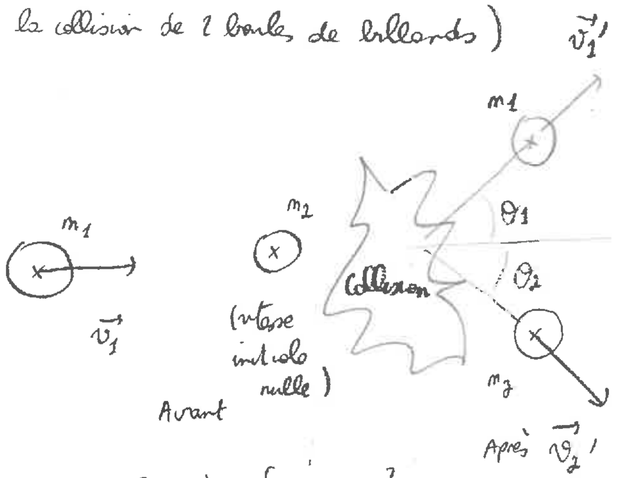
$\Rightarrow \Delta E_M = \Delta E_c + \Delta E_p$

$\Rightarrow \boxed{E_M = E_c + E_p}$

<u>Application 1</u> : les collisions étudiées dans un plan (par exemple la collision de 2 boules de billards)

- Interaction de courte durée et de courte portée

- Chocs supposés élastiques : $\sum W_i^{int} = 0$ (pas de déformation, pas d'échauffement, pas de transformation de la nature des particules



Système isolé : $\dfrac{d\vec{p_t}}{dt} = \vec{0}$

$\Delta E_{c_t} = \sum W_i^{int} = 0$

$\Rightarrow E_{c_t}\big|_{avant} = E_c\big|_{après}$

Système $\{m_1, m_2\}$ étudié dans le Référentiel Terrestre supposé Galiléen

⚠ ⚠ ⚠ COMME ON NE DÉCRIT PAS CE QUI SE PASSE PENDANT LA COLLISION, LES ÉQUATIONS (UNE FOIS PROJETÉES DANS LA BASE CHOISIE) À PARTIR DE

⚠ ⚠ ⚠ ICI L'ÉTUDE EST POSSIBLE CAR ON A IMPOSÉ UNE RÉSOLUTION DANS UN PLAN (2D) ET NON DANS L'ESPACE (3D) !!!

$$\begin{cases} m_1\vec{v_1} + \underbrace{m_2\vec{v_2}}_{=\vec{0}} = m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' \\ m_1 v_1^2 + \underbrace{m_2 v_2^2}_{=0} = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

Projection sur $(\vec{e_x}, \vec{e_y})$

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} = m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}' \\ m_1 v_{1y} = m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}' \\ m_1\left(\sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}\right)^2 = m_1\left(\sqrt{v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2}\right)^2 + m_2\left(\sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2}\right)^2 \end{cases}$$

NE PAS SE LANCER DANS LES CALCULS !!!

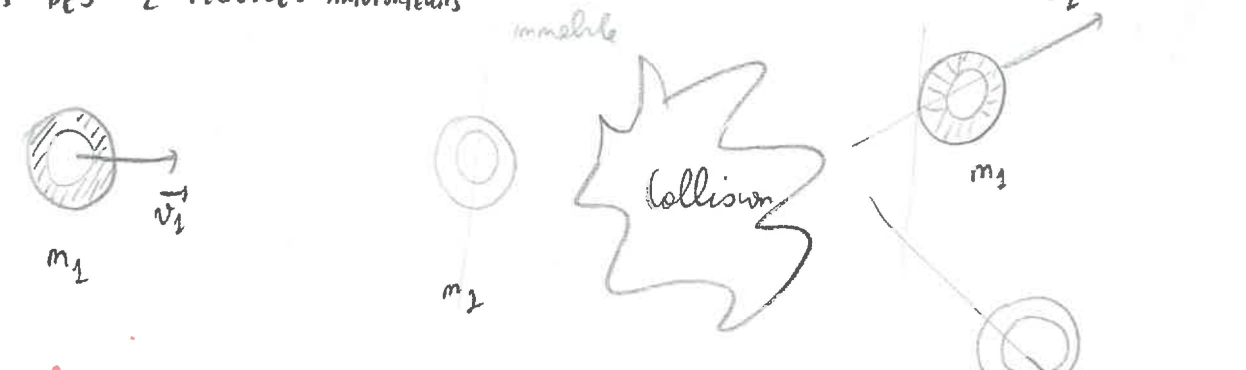
$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1x} = m_1 \underline{v_{1x}'} + m_2 \underline{v_{2x}'} & (1) \\ m_1 v_{1y} = m_1 \underline{v_{1y}'} + m_2 \underline{v_{2y}'} & (2) \\ m_1\left(v_{1x}^2 + v_{1y}^2\right) = m_1\left(v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2\right) + m_2\left(v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2\right) & (3) \end{cases}$$

4 inconnues mais 3 équations !!!

Préférer l'étude en 1D Canon de Galilée

ou

Ne pas se lancer dans les calculs et faire l'expérience de collision de 2 mobiles autoporteurs + Analyse de la vidéo sous LATIS PRO ou REGRESSI POUR OBTENIR LES QUANTITÉS DE MOUVEMENT, LA DÉRIVÉE TEMPORELLE DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT ET LES ÉNERGIES CINÉTIQUES DES 2 MOBILES AUTOPORTEURS



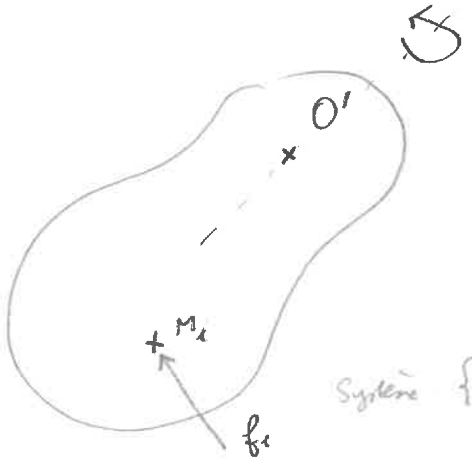
m_2 $\vec{v_2}'$

+ CALCUL DES INCERTITUDES
→ EX : INCERTITUDE DE TYPE A EN PYTHON SUR E_c SI EXPÉRIENCE RÉPÉTÉE 10 FOIS AU MOINS

Théorème du moment cinétique d'un point fixe M_i :

Étude dans un Référentiel Galiléen

Le point O' doit être un point fixe



Système { masse m_i }

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{f_i}^{ext} + \sum_{j\neq i}\vec{f_{ij}}$$

$$\vec{O'M_i}\wedge\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{O'M_i}\wedge\left(\vec{f_i}^{ext}+\sum_{j\neq i}\vec{f_{ij}}\right)$$

$$\vec{O'M_i}\wedge\frac{d\vec{p_i}}{dt} + \vec{0} = \vec{O'M_i}\wedge\vec{f_i}^{ext} + \vec{O'M_i}\wedge\sum\vec{f_{ij}}$$

0, Référentiel $\mathcal{R}$ supposé Galiléen

$$\vec{O'M_i}\wedge\frac{d\vec{p_i}}{dt} + \left(\frac{d\vec{p_i}}{dt}\wedge\frac{d\vec{p_i}}{dt}\right) = \vec{O'M_i}\wedge\vec{f_i}^{ext} + \vec{O'M_i}\wedge\sum_{i\neq j}\vec{f_{ij}}$$

$$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = m_i\frac{d\vec{v_i}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{O'M_i}\wedge\frac{d\vec{p_i}}{dt}\right) \overset{m_i \frac{d\vec{O'M_i}}{dt}}{=} \vec{O'M_i}\wedge\vec{f_i}^{ext} + \vec{O'M_i}\wedge\sum\vec{f_{ij}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L_{O'}}(M_i)}{dt} = \vec{O'M_i}\wedge\left(\vec{f_i}^{ext}+\vec{f_i}^{int}\right)}$$

Pour l'ensemble des points M_i qui constituent le système :

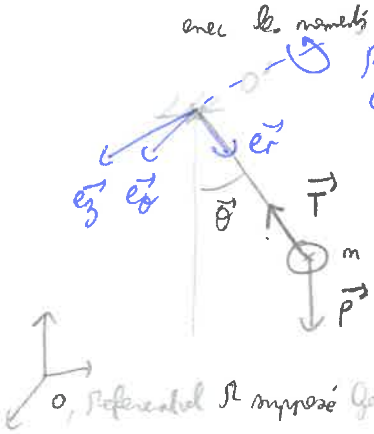
$$\sum\frac{d\vec{L_{O'}}(M_i)}{dt} = \vec{O'M_i}\wedge\sum\left(\vec{f_i}^{ext}+\vec{f_i}^{int}\right) = \underbrace{\vec{O'M_i}\wedge\sum\vec{f_i}^{ext}}_{=\vec{O'M_i}\wedge\vec{R}^{ext}} + \underbrace{\vec{O'M_i}\wedge\vec{0}}_{=\vec{0}}$$

$$= \frac{d\sum\vec{L_{O'}}(M_i)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum\vec{O'M_i}\wedge\vec{p_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum\vec{O'M_i}\wedge m_i\vec{v_i}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L_{O'}}(\Sigma)\right) = \mathcal{M}_{O'}\left(\vec{R_{ext}}\right)$$

Exemple : (si on a le temps)

le pendule simple étudié avec les moments



Référentiel $\mathcal{R}'$ de centre O' Galiléen mais en base polaire

Système { masse ponctuelle m }

$\Rightarrow \vec{OM}\wedge m\vec{a} = r\vec{e_r}\wedge m(\ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r})$

$\mathcal{M}_{/O'}(\vec{T}) = \vec{0}$

$\mathcal{M}_{/O'}(\vec{P}) = -mgl\sin(\theta)\vec{e_z}$

$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta}\vec{e_z} = -mgl\sin(\theta)$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$

Passage aux énergies associées à la rotation.

- 1ère méthode : (2ième théorème de Kœnig)

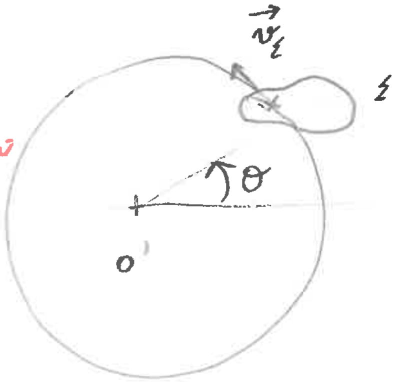
$$E_c = \frac{1}{2} m_\Sigma v_\Sigma^2 = \frac{1}{2} m_\Sigma (r\dot{\theta}_\Sigma)^2$$

⚠⚠⚠ VALABLE UNIQUEMENT SI LE SYSTÈME SUBIT UNE ROTATION PURE

vitesse de rotation

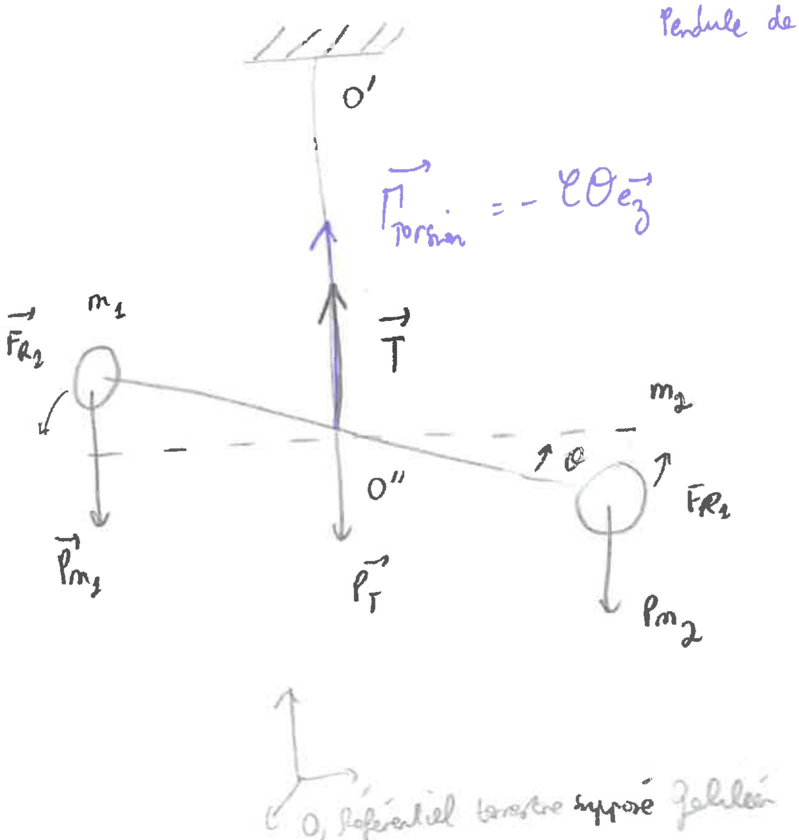
$$= \frac{1}{2} m_\Sigma r^2 (\dot{\theta}_\Sigma)^2$$

$m_\Sigma r^2 = I_\Delta$ (moment d'inertie du système)



- 2ième méthode (En utilisant l'intégrale première du mouvement).

Application 2 : le pendule de torsion [Jean-Julien Fleck, PCSI, Physique, Kléber / DiaN, Pendule de Torsion]



Système $\{m_1 + \text{tige} + m_2\}$

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

Inventaire des forces :

$$\vec{P_{m_1}} + \vec{P_{m_2}} + \vec{P_T} + \vec{T} = \vec{0}$$

Inventaire des moments :

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O''}(\vec{P_{m_1}}) = \vec{\mathcal{M}}_{/O''}(\vec{P_{m_2}}) = \mathcal{M}_{/O''}(\vec{P_T}) = $$

$$\mathcal{M}_{/O''}(\vec{T}) = \vec{0}$$

$$\mathcal{M}_{/O''}(\vec{F_{R_1}}) + \mathcal{M}_{/O''}(\vec{F_{R_2}}) = \vec{\Gamma}_{torsion}$$

$$= -C\theta\vec{e_z}$$

D'après le théorème des Moments cinétiques :

$$\frac{d\vec{L}_{/O''}(\Sigma)}{dt} = \vec{\Gamma}_{torsion}$$

Projection en base polaire $\longrightarrow$

$$r\vec{e_r} \wedge m(\ddot{r}\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}) = -C\theta\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow mr^2\ddot{\theta}\vec{e_z} = -C\theta\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow I_\Delta \ddot{\theta}\vec{e_z} = -\mathcal{C}\theta\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}\theta = 0$$

Equation différentielle d'ordre 2 sans second membre

$$\theta_g(t) = \theta_H(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}}\,t\right)$$ (Oscillateur harmonique)

En prenant les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} \theta_g(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}_g(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \theta_0 \\ \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}}\,B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_g = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}}\,t\right)$$

Passage aux énergies en prenant l'intégrale première du mouvement ($\times\,\dot{\theta}$ puis intégration sur dt $\int \vec{f}\cdot\vec{dl} = \int \vec{f}\cdot\vec{v}\,dt$)

$$\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}\theta = 0$$

$\times\,\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}\dot{\theta}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) + \frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^2}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{\mathcal{C}}{2}\theta^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{\mathcal{C}}{2}\theta^2}_{E_p} = \text{Constante}$$

⚠ ⚠ ⚠ ENORMES PIÈGES DANS CETTE LEÇON PAR MANQUE DE RIGUEUR !!!

Principe fondamental de la Dynamique (2nd loi de Newton)

$$\vec{R_{ext}} = \frac{d\vec{p_G}(\Sigma)}{dt}$$

$$\cancel{\sum \vec{F_{ext}}} = \cancel{\frac{d\vec{p_G}}{dt}} = \frac{d(m\vec{v_G})}{dt} = \frac{dm_\Sigma}{dt}\vec{v_G} + m_\Sigma \frac{d\vec{v_G}}{dt}$$

0 (système fermé)

⚠ ⚠ ⚠ VALABLE UNIQUEMENT DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

1ère extension : représentation des forces inertielles dans un référentiel non Galiléen

$$= m_\Sigma \frac{d\vec{v_G}}{dt} = m_\Sigma\left(\frac{d\|\vec{v_G}\|}{dt}\vec{u_{v_G}} + \|\vec{v_G}\|\frac{d\vec{u_{v_G}}}{dt}\right)$$

Le centre d'inertie est défini par $m_\Sigma \vec{OG} = \sum m_i \vec{OM_i} \Rightarrow \sum m_i \vec{GM_i} = \vec{0}$

Projection en base polaire $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{e_r} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \Rightarrow \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{r}\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

COMME LA BASE POLAIRE N'EST PAS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN (⇒ AJOUT DE FORCES FICTIVES)

$$\sum \vec{F_{ext}} + \sum \vec{F_{fictives}} = \underbrace{m\ddot{r}\vec{e_r}}_{\text{force liée à l'accélération radiale}} + \underbrace{2m\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta}}_{\text{force de Coriolis}} + \underbrace{mr\ddot{\theta}\vec{e_\theta}}_{\text{Force liée à l'accélération tangentielle}} - \underbrace{mr\dot{\theta}^2\vec{e_r}}_{\text{Force centripète}}$$

ou les forces [illegible]

[marchetta benjamin. wordpress. com/ .. / physique - prep pdf]

2ème extension. si le système est {masse élémentaire dm dans un fluide}

$$\sum \vec{f_{ext}} = \frac{D(\rho\vec{v})}{Dt} = \underbrace{\frac{D(\rho)}{Dt}}_{=\vec{0}\text{ (système incompressible)}}\vec{v} + \rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)$$

Forces volumiques des forces appliquées