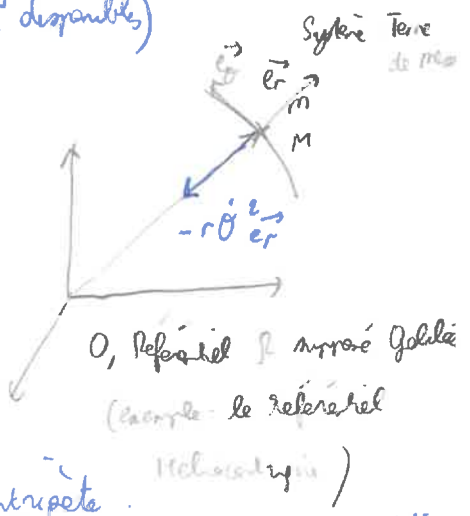
Plan Leçon 1. Gravitation

Références : [facebook.com / Prepas physique / Démontrer la force gravitationnelle]

Idée : retrouver le raisonnement de Newton (les lois de Kepler étaient déjà disponibles)

1) Force centripète d'un solide en rotation



$$\vec{OM} = \vec{r} = r.\vec{e_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \underbrace{\ddot{r}\vec{e_r}}_{\text{Accélération relative}} + \underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta}}_{\text{Accélération de Coriolis}} + \underbrace{r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}}_{\text{Accélération tangentielle (Accélération d'Euler)}} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

Accélération centripète car projeté sur $\vec{e_r}$ en direction du centre de rotation O

$\Rightarrow$ L'accélération centripète : $-r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

D'après la Seconde loi de Newton : $\vec{F}_{centripète} = -mr\dot{\theta}^2\vec{e_r} = -m\frac{V_{radiale}^2}{r}\vec{e_r}$

⚠⚠⚠ L'ACCÉLÉRATION CENTRIPÈTE N'EST PAS UNE FORCE FICTIVE, IL S'AGIT DE LA FORCE OBLIGATOIRE DE TOUTE ROTATION QUI LIE L'OBJET AU CENTRE DE LA ROTATION (EX : TENSION D'UN FIL, FORCE GRAVITATIONNELLE)

2) Relation avec la période de révolution :

Si l'on suppose qu'il s'agit d'un cercle

$$\langle v \rangle = \frac{d_{TOTALE}}{T} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\langle V_{radiale} \rangle = \frac{2\pi r}{T}$$

3) D'après la 2nd loi de Kepler :

$$\Delta A = \iint r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{1}{2} r^2\dot{\theta}$$ ← Moment cinétique L du solide

$$= \frac{1}{2} L \Delta t$$

$\Rightarrow$ Pour que la 2nd loi de Kepler soit valable, il faut que le moment cinétique du système autour de l'axe O soit constant donc que la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ soit constante s'il s'agit d'un cercle

Ainsi $v_{radiale} = r\dot{\theta}$ sera aussi constante

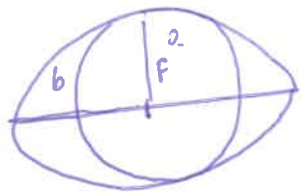
$\Rightarrow \langle v_{radiale} \rangle = v_{radiale}$

$$\Rightarrow v_{radiale} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{centripète} = \frac{-m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \cdot \vec{e_r}$$

$$= -\frac{m\, 4\pi^2 r}{T^2}$$

3) Application de la 3ième loi de Kepler :



$$\frac{a^3}{T^2} = \text{constante}$$

Dans un cercle : le demi-grand axe b = le demi-petit axe a = rayon du cercle (UN CERCLE EST UNE ELLIPSE AVEC UNE EXCENTRICITÉ e (≡ UN APPLATISSEMENT) NUL)

$$\Rightarrow \vec{F}_{centripète} = -\frac{m\, 4\pi^2 \cancel{r} \cdot \text{constante}}{r^{\cancel{3}\,2}} \vec{e_r}$$

4) Dépendance en M_{soleil} grâce au principe d'Action-Réaction (3ième loi de Newton)

Comme la force gravitationnelle est une action attractive et à distance, pour que le système exerce la même force sur le Soleil que le soleil sur le système, il faut que la même caractéristique du système et du soleil apparaisse dans l'équation

$\Rightarrow$ Cette caractéristique est la masse

$$\Rightarrow \vec{F}_{centripète} = -\frac{m\, 4\pi^2 \times M_{soleil} \times \text{Constante}\ 2}{r^2} \cdot \vec{e_r} = -G\frac{m M_{soleil}}{r^2} \cdot \vec{e_r}$$

G peut être déterminé à l'aide de la Balance de Cavendish :

→ Vidéo très courte du modèle récent avec pointeur laser

→ Explication de pourquoi je ne l'ai pas présenté : Périodes très longues à stabiliser, variation d'angle de 1/10 degrés, ...

Mais : Sur Terre g (l'accélération gravitationnelle) peut être mesurée :

$$\vec{P} = m_{objet} \cdot \vec{g}$$

$$G \times \frac{M_{Terre} \times m_{objet}}{R_{Terre}^2} = m_{objet} \cdot g$$

$$\Rightarrow g = G \times \frac{M_{Terre}}{R_{Terre}^2}$$

$$\Rightarrow G = g \times \frac{R_{Terre}^2}{M_{Terre}}$$

→ Détermination possible en supposant que la Terre est une sphère et que l'on mesure la distance d'un tour du monde

→ Comment l'estimer expérimentalement

Mesure de g :

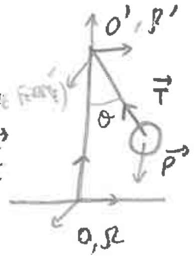
→ Dynamomètre + Balance

→ Pendule simple

Expérience du pendule simple : [physique.ens.rennes.fr / tp pendule]

Choix référentiel pour permettre aux élèves de retrouver le comportement temporel

→ En base cartésienne (à ~~développer~~) (Utiliser le référentiel R').



Système = {masse m suspendue à un fil de masse négligeable}

2nd loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d(\vec{p})}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$; 0 (système fermé)

$\Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Projection dans le Référentiel R' défini par la base cartésienne

$$\begin{cases} -T\sin(\theta)\vec{e_x} = R\ddot{\theta}\cos(\theta) - R\dot{\theta}\sin(\theta) \\ T\cos(\theta)\vec{e_y} - mg\,\vec{e_y} = R\ddot{\theta}\sin(\theta) + R\dot{\theta}^2\cos(\theta) \end{cases}$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

Approximation petits angles $\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\theta \simeq 0$

$\Rightarrow \theta = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}(t - t_0)\right)$

A DEVELOPPER → En base polaire (ne pas développer l'équation avec T (sur $\vec{e_r}$), uniquement l'autre équation (sur $\vec{e_\theta}$))

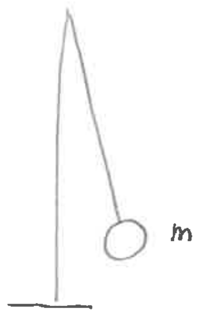
→ Avec le moment cinétique

→ Avec les énergies (⚠ DEUX ASTUCES. 1) DL du $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

2) $E_c + E_{pp} = E_m =$ Constante

$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_{pp}}{dt} = 0$

permet de retrouver l'équation différentielle classique)



⚠ ⚠ ⚠ Approximation petits angles $\theta < 10°$

(sinon formule de Bordas : correction de la période : $T = T_0(1 +$

Refaire au moins 20 fois la mesure → Incertitude de type A + calcul du z score en Python

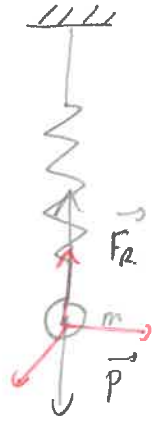
Si mesure faite 5 fois → Incertitude de type B + calcul du z score en Python

⚠ ⚠ ⚠ CORRECTION DU MOUVEMENT DU SYSTÈME DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE PAR RAPPORT AU MOUVEMENT DU SYSTÈME DANS LE RÉFÉRENTIEL GÉOCENTRIQUE

⇒ Pendule de Foucault (il faut au moins ajouter la force de Coriolis)

- Expérience n° 1 pour la gravitation :

PAS POSSIBLE D'UTILISER
LE PENDULE À RESSORT
CAR ω_0 NE DÉPEND
PAS DE g !!!



POSITIONNÉ LE
RÉFÉRENTIEL À
LA POSITION
D'ÉQUILIBRE
DU SYSTÈME

- Expérience 2 : la balance de Cavendish

Développements similaires au pendule de torsion, développés très élégamment grâce aux moments :

[Youtube (Jean-Julien Fleck, PCSI, Physique, Kléber) // DiaN, Pendule de Torsion]

Rajouter le moment gravitationnel $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F_g} = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \frac{2mM}{d^2} \cdot \vec{e_\theta}$

Ouverture lien avec l'électromagnétisme (Gravitomagnetism)

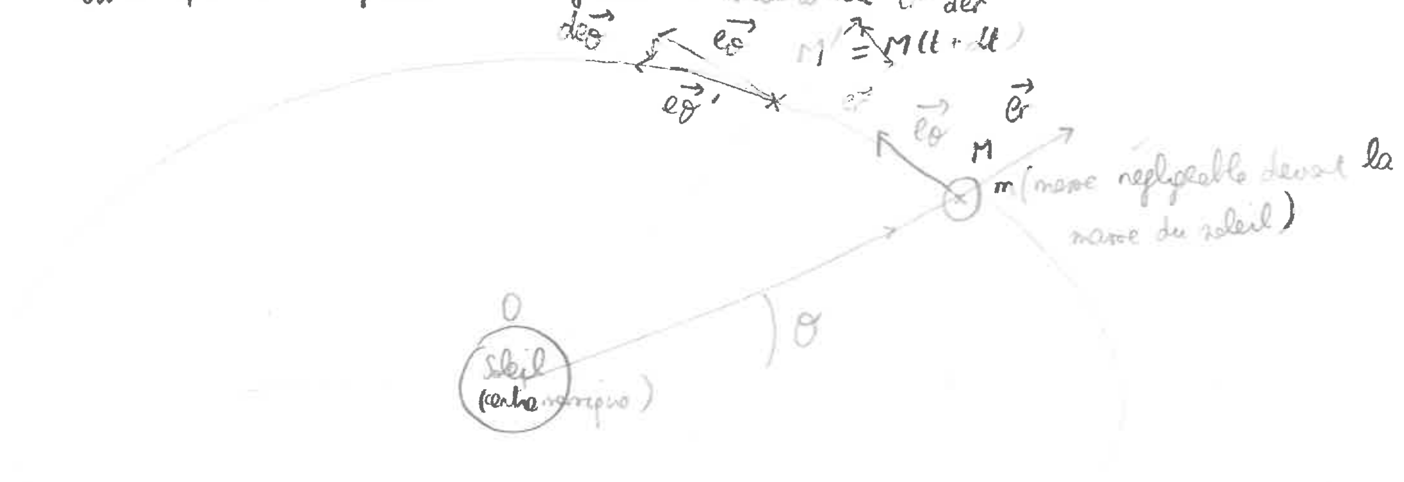
- $\vec{B}_g$ équivalent ??? Définition à partir de la force de Lorentz gravitationnelle équivalente

$$F_g = m(\vec{E}_g + \vec{v} \wedge 4\vec{B}_g)$$

Est-ce qu'il y a une force gravitationnelle additionnelle lorsqu'une particule de masse m est en mouvement

- Permet de modéliser de manière plus simple les ondes gravitationnelles prédites il y a 100 ans par Einstein et détectées pour la première fois en 2014 ? par les projets VIGO et LIRGO (interféromètre de Michelson)

Lois de Kepler comme preuve de la gravitation universelle



Système {entre de masse m negligeable devant la masse du soleil}

Référentiel Héliocentrique utilisant les coordonnées polaires (⚠⚠⚠ INTRODUCTION DE FORCES FICTIVES & LES DÉRIVÉES DES VECTEURS UNITAIRES NE SONT PAS PRISES EN COMPTE !!!)

Etude dans le plan :

Position $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e_r} \\ \vec{e_\theta} \end{matrix} = r\,\vec{e_r} + 0\,\vec{e_\theta}$

car $\vec{r}$ et $\vec{u_r}$ sont colinéaires !!

Vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\|\vec{r}\|\,\vec{u_r})}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$= \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$

Moment cinétique : $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

$= \vec{r} \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = r^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$

(⚠⚠⚠ POUR UNE ROTATION DONT LE LE CENTRE DE ROTATION CORRESPOND AU CENTRE DU RÉFÉRENTIEL)

(⚠⚠⚠ L'ÉTUDE SIMPLE D'UNE ROTATION PAR LE MOMENT CINÉTIQUE NÉCESSITE UN CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL DONT LE CENTRE DEVRA SE PLACER AU CENTRE DE LA ROTATION, SINON ÉTUDE PLUS COMPLEXE (FORMULE DE BOUR & DE VARIGNON (LE POINT M ÉTUDIÉ DEVRA SE PLACER SUR LA SURFACE DE L'OBJET QUI TOURNE)

Accélération $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2(\|\vec{r}\|\,\vec{u_r})}{dt^2}$

$= \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$

$= \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$

Accélération cinétique :

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge m\vec{v})}{dt}$

$= \dot{\vec{r}} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\dot{\vec{v}}$

$= \vec{r} \wedge m\dot{\vec{v}} = \vec{r} \wedge m\dot{v}_\theta\,\vec{e_\theta}$

$= m(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\vec{e_z}$ (Oz)

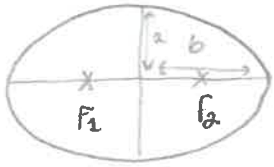
De plus, l'équation polaire d'une ellipse est : (démontrable mathématiquement)

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

petit rayon

Axe arbitraire de l'ellipse

excentricité (paramètre d'applatissement) entre 0 (pour un cercle) et 1 pour une parabole (décrochage de l'orbite)



L'aire d'une ellipse est : (démontrable mathématiquement).

- L'aire totale : $A_{total} = \int_0^{2\pi} \cancel{r(\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} d\theta = \pi \times a \times b$
- L'aire d'une portion de courbe : $A_{portion} = \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \cancel{r(\theta)}\, d\theta = \int_{\theta_1(t)}^{\theta_2(t)} \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} d\theta$

⚠ ⚠ ⚠ θ peut être lié au temps grâce à la vitesse angulaire

$$= \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} d\theta$$

vitesse angulaire et non pulsation

$$= a(1-e^2) \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \frac{1}{1+e\cos(\theta-\theta_0)} d\theta$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$= a(1-e^2) \left[\frac{\ln(|1+e\cos(\theta-\theta_0)|)}{\cos(\theta-\theta_0)} \right]_{\omega t_1}^{\omega t_2}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

Par intégration

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} \equiv t_2 - t_1 = \frac{\theta_2-\theta_1}{\omega}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \omega \Delta t \equiv \theta_2 - \theta_1 = \omega(t_2 - t_1)$$

$$= a(1-e^2) \cancel{\ln\left(\left|\frac{1+e\cos(\omega t_2-\theta_0)}{1+e\cos(\omega t_1-\theta_0)}\right| \times \frac{\cos(\omega t_1-\theta_0)}{\cos(\omega t_2-\theta_0)}\right)}$$

⚠ ⚠ ⚠ L'ÉLÉMENT D'INTÉGRATION EN COORDONNÉES CYLINDRIQUES EST $r\,dr\,d\theta$!!!

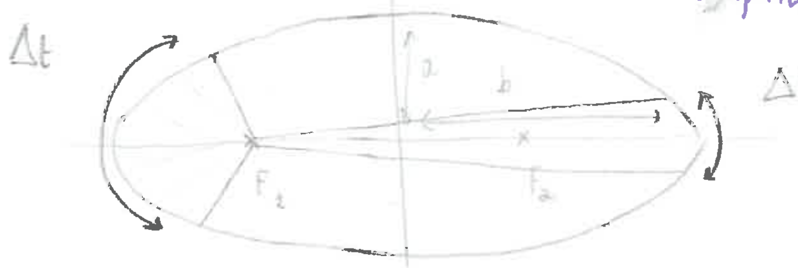
$$A_{portion} = \Delta A = \iint r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int r^2\, d\theta$$

moment cinétique

$$= \frac{1}{2}\int L\,dt$$

$$= \frac{1}{2} L \Delta t$$



Démonstration de la Seconde loi de Kepler : [Démonstration des lois de Kepler à l'aide du calcul différentiel et intégral, Serge Robert, ...]

Démonstration de la 3ième loi de Kepler : [Démonstration des lois de Kepler à l'aide du calcul différentiel et intégral, Serge Robert]

A partir de la deuxième loi de Kepler :

$$A_{total} = \frac{1}{2} L \, T_{TOTAL}$$

et mathématiquement :

$$A_{ellipse} = \pi \times a \times b$$

et

$$\cancel{c^2 = a^2 - b^2} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

~~distance focale~~

$$\Rightarrow \pi \times a \times \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2} L \, T_{TOTAL}$$

$$\Rightarrow \pi^2 a^2 (a^2 - c^2) =$$

point de l'ellipse où la distance est minimale par rapport à l'un des foyers de l'ellipse

Ne permet pas de conclure, à la place, il faut utiliser le péricentre p de l'ellipse

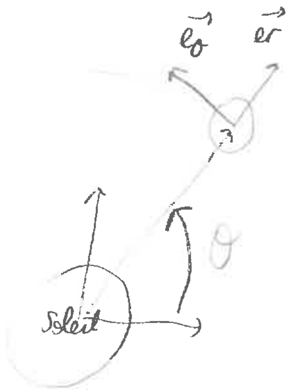
$$p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow b^2 = pa \Rightarrow b = \sqrt{pa}$$

$$\Rightarrow \pi a \sqrt{pa} = \frac{1}{2} L \, T_{TOTAL}$$

$$\Rightarrow \pi^2 a^3 p = \frac{1}{4} L^2 \, T_{TOTAL}^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{T_{TOTAL}^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{L^2}{p}$$

Demonstration rigoureuse de la première loi de Kepler:



Position $\vec{r} = r\vec{e_r}$

Vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

Accélération $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$

En appliquant la Seconde loi de Newton:

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$

En supposant que la seule force externe est la gravité

$$-\frac{G m_A m_B}{r^2}\vec{e_r} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta}$$

La projection sur $\vec{e_\theta}$ n'est pas associée à une force

$\Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ $\times r$

$\Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow d(r^2\dot{\theta}) = 0$

$\Rightarrow r^2\dot{\theta} =$ Constante $= H$ $\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{H}{r^2}$

RESULTAT FONDAMENTAL S'IL N'Y A PAS DE FORCES TANGENTIELLES, L'ACCELERATION TANGENTIELLE EST NULLE ET CELA IMPLIQUE QUE LE MOMENT CINETIQUE EST CONSTANT (TRÈS IMPORTANT POUR DEMONTRER LA LOI DES AIRES)

D'autre part,

$$-\frac{G m_A m_B}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow -\frac{G m_A m_B}{r^2} = \ddot{r} - \cancel{r}\frac{H}{r^{\cancel{4}3}}$$

En posant $u = \frac{1}{r}$ $\quad \dot{u} = -\frac{1}{r^2}\dot{r}$ $\quad \ddot{u} = \frac{2}{r^3}\dot{r}^2 - \frac{1}{r^2}\ddot{r}$

$\Rightarrow r = \frac{1}{u}$ $\quad \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}$ $\quad \ddot{r} = \frac{2\dot{u}^2}{u^3} - \frac{1}{u^2}\ddot{u}$

$$\Rightarrow -G m_A m_B u^2 = \frac{2\dot{u}^2}{u^3} - \frac{1}{u^2}\ddot{u} - Hu^3$$

Cependant, on cherche u non pas par rapport au temps mais par rapport à θ

$$u' = \frac{du}{d\theta} \qquad u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\boxed{\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = u' . Hu^2}$$

Dérivée d'une fonction composée

$$\ddot{u} = u'(2Huu') + \frac{du'}{dt} Hu^2$$

$$= 2H^2u^3u'^2 + Hu^2 \cdot \frac{du'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= 2H^2u^3u'^2 + Hu^2 u'' . Hu^2$$

$$\boxed{\ddot{u} = 2H^2u^3u'^2 + H^2u^4u''}$$

En reprenant l'expression $\frac{2}{u^3}\dot{u}^2 - \frac{1}{u^2}\ddot{u} - H^2u^3 = -Gm_1m_2u^2$ et en remplaçant $\dot{u}$ et $\ddot{u}$

$$\Rightarrow \frac{2}{u^3} H^2u^4u'^2 - \frac{1}{u^2}\left(2H^2u^3u'^2 + H^2u^4u''\right) - H^2u^3 = -Gm_1m_2u^2$$

$$\Rightarrow \cancel{2uu'^2} - \cancel{2uu'^2} - u^2u'' - u^3 = -\frac{Gm_1m_2}{H^2}u^2$$

$$\Rightarrow u'' + u = \frac{Gm_1m_2}{H^2} \quad (+ \beta u^2)$$

TERME RAJOUTÉ En RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Equation du Second Ordre avec Second membre

1) Résolution de l'équation homogène : $u'' + u = 0 \Rightarrow u_H(t) = A\cos(\theta + \theta_0)$

3) Résolution de la solution particulière

$$u_p = A\cos(\theta - \theta_0) + B$$

$$u_p' = -A\sin(\theta - \theta_0)$$

$$u_p'' = -A\cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow B = -\frac{Gm_1m_2}{H}$$

⇒ La solution de l'équation générale est donc

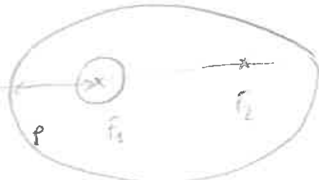
$$u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{G m_1 m_2}{H^2}$$

Comme $r = \frac{1}{u}$:

$$r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{1}{A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{G m_1 m_2}{H^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{r(\theta) = \frac{\frac{H^2}{G m_1 m_2}}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$

Il s'agit de l'équation polaire d'une ellipse :



$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}$$

p : péricentre ou périgée

e : excentricité (coefficient d'aplatissement de l'ellipse)

θ_0 : Angle des axes de l'ellipse par rapport au plan horizontal

Pour un cercle $e = 0$ ⇒ $F_1 = F_2$

Pour une ellipse très aplatie, F_2 très loin de F_1 : $e \to 1$

lorsque $e = 1$ ⇒ parabole ou hyperbole ⇒ décrochage de la planète de son orbite

les lois de Kepler peuvent être aussi obtenues à l'aide d'un système à 2 corps (ce qui est un système différent d'une collision car les 2 corps sont liés par une force)

le développement est disponible sur [femto-physique.fr/mecanique/probleme à 2 corps]

+ VIDEO ELEARNING - PHYSIQUE

THÉORÈME DE GAUSS EN GRAVITATION

POUR AVOIR LE CHAMP GRAVITATIONNEL À L'INTÉRIEUR DE LA TERRE

+ VIDEO ELEARNING - PHYSIQUE

LOIS DE KEPLER