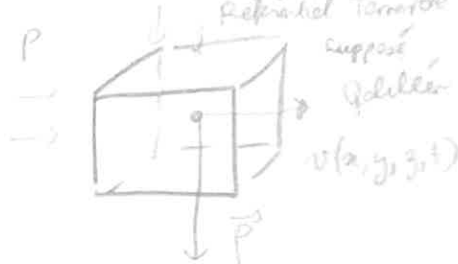
Ecoulement dans les fluides parfaits

→ fluide parfait : fluide inviscid et irrotationnel ???

Système = { dV_{fluide} } étudié dans le Référentiel Terrestre supposé Galiléen



Equation de Navier-Stokes générale

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \sum f_{ext}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \vec{\nabla}\wedge\vec{v}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P) - \rho\vec{g} + \eta\,\Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\,\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P) - \vec{\nabla}(\rho g\Delta h) + \eta\,\Delta\vec{v}$$

Pour un fluide parfait (inviscid)

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P) - \vec{\nabla}(\rho g h)$$

Théorème de Bernoulli :

A partir de l'équation de Navier Stokes générale

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P) - \vec{\nabla}(\rho g h) + \eta \Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \underbrace{(\vec{\nabla}\wedge\vec{v})}_{2\vec{\omega}}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P) - \vec{\nabla}(\rho g h) + \eta\Delta\vec{v}$$

Pour un fluide parfait ≡ fluide inviscid

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}\right) = -\vec{\nabla}(P) - \vec{\nabla}(\rho g h)$$

Pour un fluide incompressible, parfait, uniforme, stationnaire, irrotationnel

sans d'autre force que la force de pression et le poids

(FIPUSIR^3)

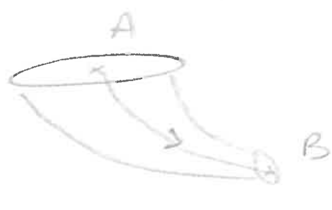
$$\Rightarrow \rho\left(\vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right) = -\vec{\nabla}(P) - \vec{\nabla}(\rho g h)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{2}v^2\right) + \vec{\nabla}(P) + \vec{\nabla}(\rho g h) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{2}v^2 + P + \rho g h\right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{\rho}{2}v^2 + P + \rho g h$ = Constante sur chaque ligne de champ parcourue par une même molécule de fluide

$$\Rightarrow \frac{\rho}{2}v_A^2 + P_A + \rho g h_A = \frac{\rho}{2}v_B^2 + P_B + \rho g h_B$$



D'après Mike Porriert :

Définition du Débit de masse :

$$D_m = \iiint \frac{\partial \rho_m}{\partial t} dV = \iiint \frac{\partial \rho_m}{\partial t} d\vec{S} . d\vec{r} = \iiint \partial \rho_m \, d\vec{S} . \vec{v} = \iint \rho_m \vec{v} . d\vec{S}$$

En écoulement unidimensionnel : S est constante $\Rightarrow D_m = \rho v S$

En régime permanent : $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \rho_e v_e S_e - \rho_s v_s S_s = 0 \Rightarrow \rho_e v_e S_e = \rho_s v_s S_s$

Cas unidimensionnel et permanent : $D_m = \rho v S$

Débit en Volume : (CAS TRÈS PARTICULIER)

$$\iiint \overbrace{\frac{\partial \rho_v}{\partial t}}^{=1} dV = \iint \overbrace{C}^{=1} . \vec{v} . d\vec{S} = \int \vec{v} . d\vec{S}$$

LE DÉBIT NÉCESSITE DES DENSITÉS VOLUMIQUES (≡ DES QUANTITÉS MICROSCOPIQUES)

Généralisation à tous les débits.

Soit δ_x une quantité emportée par un volume $d\tau^3$

$D_x = \frac{\delta_x}{dt}$ quantité qui traverse une section S

$\Rightarrow \delta_m = \rho_x \, d\tau^3$ (définition d'une densité volumique)

et

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

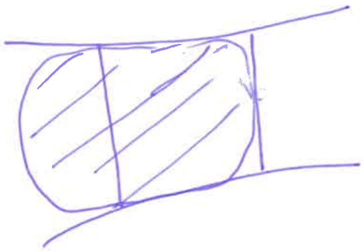
$$\Rightarrow D_x = \iint \frac{\delta \rho_x}{\partial t} d\tau^3 = \iiint \frac{\partial \rho_x}{\partial t} d\vec{r} . d\vec{S} = \iint \partial \rho_x \, \vec{v} . d\vec{S} = \iint \rho_x \vec{v} . d\vec{S}$$

Ex : si x est une quantité de mouvement (une densité volumique de quantité de mouvement) :

$\vec{D}_{\vec{p}} = \iint \rho \vec{v} \, \vec{v} . d\vec{S}$

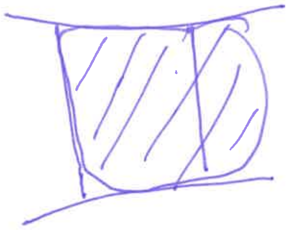
Bilans en systèmes ouverts :

- Bilan de masse



$$m_S(t) = m_\Sigma(t) + \delta m_e$$
$$m_S(t+dt) = m_\Sigma(t+dt) + \delta m_S$$

$$\Rightarrow m_S(t+dt) - m_S(t) = m_\Sigma(t+dt) - m_\Sigma(t) + \delta m_S - \delta m_e$$



$$\Rightarrow \frac{dm_S(t)}{dt} = \frac{dm_\Sigma(t)}{dt} + \frac{\delta m_S}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dm_\Sigma(t)}{dt} = \frac{dm_S(t)}{dt} + \frac{\delta m_S}{dt} - \frac{\delta m_e}{dt}$$

↳ Terme source ou terme puit de masse $(=0)$

$\frac{\delta m}{dt}$ = Debit macroscopique exprimé en terme microscopique !!!

$$\frac{\delta m}{dt} = \iint \rho_m \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

$$\Rightarrow \frac{dm_\Sigma}{dt} = D_{me}(t) - D_{mS}(t)$$

- Bilan de quantité de mouvement :

$$\vec{P}_\varphi(t) = \vec{p}_\Sigma(t) + \delta \vec{P}_{entrée}$$

$$P_\varphi(t+dt) = p_\Sigma(t+dt) + \delta P_{sortie}$$

$$\Rightarrow \frac{dp_\varphi(t)}{dt} = \frac{dp_\Sigma(t)}{dt} + \frac{\delta p_s}{dt} - \frac{\delta p_e}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dp_\Sigma}{dt} = \frac{dp_\varphi(t)}{dt} + \frac{\delta p_e}{dt} - \frac{\delta p_s}{dt}$$

TERME SOURCE OU TERME PUIT, DANS LE CAS D'UNE QUANTITÉ DE MOUVEMENT, IL S'AGIT DU THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE $\left(\frac{dp_\varphi(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \right)$

$$\Rightarrow \frac{dp_\Sigma}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{D}_{\vec{p}_e} - \vec{D}_{\vec{p}_s}$$

UN DÉBIT CORRESPOND BIEN À UNE VARIATION PAR RAPPORT AU TEMPS

$$D_x = \frac{\delta x}{dt}$$ ← quantité macroscopique

$$= \iint \rho_x \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

↑ Quantité microscopique

⚠ ⚠ ⚠ UN DÉBIT FAIT LE LIEN ENTRE UNE QUANTITÉ MACROSCOPIQUE ET UNE QUANTITÉ MICROSCOPIQUE

- Bilan d'énergie

$$E_{M_\varphi}(t) = E_{M_\Sigma}(t) + \delta E_{M_e}$$

$$E_{M_\varphi}(t+dt) = E_{M_\Sigma}(t+dt) + \delta E_{M_s}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{M_\varphi}(t)}{dt} = \frac{dE_{M_\Sigma}(t)}{dt} + \frac{\delta E_{M_s}}{dt} - \frac{\delta E_{M_e}}{dt}$$

TERME SOURCE
OU TERME PUIT

$$\Rightarrow \frac{dE_{M_\Sigma}}{dt} = \frac{dE_{M_\varphi}}{dt} + \frac{\delta E_{M_e}}{dt} - \frac{\delta E_{M_s}}{dt}$$

TERME SOURCE
OU TERME PUIT
=
Puissance perdue ou gagnée intrinsèquement par le système :
$P_{dissipée} + P_W$ (APPELÉES AUSSI PERTE DE CHARGE)

$$\Rightarrow \frac{dE_{M_\Sigma}}{dt} = DE_{M_e} - DE_{M_s} + P_{dissipée} + P_W$$

Débit d'énergie mécanique :

$$D_{E_m} = \iint e_{em}\, \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

$$= \iint \left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h\right) \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

Pour un écoulement unidimensionnel $\left(\iint \vec{dS} = S\right)$ et uniforme (v identique sur toute la section)

et pour un fluide incompressible $(\rho_e = \rho_s = \rho)$

D'après Mike Poncète, il faut que l'écoulement soit uniforme

$$\Rightarrow D_{E_m} = \left[\frac{1}{2} v^2 + \rho g h\right] \underbrace{\iint \rho\, \vec{v} \cdot \vec{dS}}_{D_m}$$

$$= D_m \left[\frac{1}{2} v^2 + g h\right]$$

$$\left(= \underset{1}{\underset{\shortparallel}{D_v}} \left[\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h\right] \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_{m_\Sigma}}{dt} = D_{m_e}\left[\frac{1}{2} v_e^2 + g h_e\right] - D_{m_s}\left[\frac{1}{2} v_s^2 + g h_s\right] + P_{dissipée} + P_w$$

En régime stationnaire : $\dfrac{dE_{m_\Sigma}}{dt} = 0$

$$\Rightarrow D_{m_s}\left[\frac{1}{2} v_s^2 + g h_s\right] - D_{m_e}\left[\frac{1}{2} v_e^2 + g h\right] = P_{dissipée} + P_w$$

Dans les conditions d'application du théorème de Bernoulli

$$\Rightarrow D_{m_s}\left[\frac{1}{2} v_s^2 + g h_s\right] = D_{m_e}\left[\frac{1}{2} v_e^2 + g h_e\right]$$

$$\Leftrightarrow \underset{1}{\underset{\shortparallel}{D_{v_s}}} \left[\frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g h_s\right] = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{D_{v_e}}} \left[\frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g h_e\right]$$

On retrouve ainsi le théorème de Bernoulli sur un bilan dans un système ouvert d'énergie mécanique avec expression du Débit massique

Comparaison des 2 méthodes pour obtenir le théorème de Bernoulli :

- méthode à partir de l'équation de Navier Stokes : très claire fait apparaître toutes les conditions nécessaires à la formule de Bernoulli

- méthode à partir du bilan en système ouvert d'énergie mécanique : permet d'obtenir une version de Bernoulli étendue avec perte de charge :

$$\underbrace{D_{v_e}}_{=1}\left[\frac{\rho_e}{2}v_e^2+\rho_e g h_e\right]-\underbrace{D_{v_s}}_{=1}\left[\frac{\rho_s}{2}v_s^2+\rho_s g h_s\right]=\underbrace{P_{\text{dissipée}}+P_W}$$

Perte de charge!!!