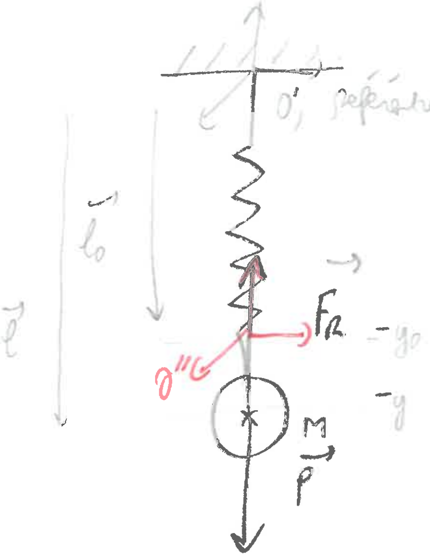
Le pendule avec ressort :



O', Référentiel Galiléen car fixe par rapport au Référentiel Terrestre supposé Galiléen

Système {masse m}

⚠⚠⚠ PRENDRE L'ORIGINE DU REPÈRE À LA MASSE DU RESSORT À L'ÉQUILIBRE PERMET DE S'AFFRANCHIR DU TERME l_0. ET DONC D'ÉVITER LA CONFUSION ENTRE y_0 ET y_{max} !!!

O, Référentiel Terrestre supposé Galiléen

LE RÉFÉRENTIEL ÉTANT GALILÉEN, LA SECONDE LOI DE NEWTON PEUT ÊTRE APPLIQUÉE.

$$\sum \vec{F_{ext}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Projection dans la base cartésienne

Si $\|\vec{l}\| > \|\vec{l_0}\|$

$\vec{F_R}$ est projeté suivant le $\vec{e_y}$ croissant

$$\vec{P} = -mg\,\vec{e_y}$$

$$\vec{F_R} = -k(\vec{l}-\vec{l_0}) = -k\left(-y\,\vec{e_y} + y_0\,\vec{e_y}\right) = k(y-y_0)\,\vec{e_y}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0\ \text{(SYSTÈME FERMÉ)}}\cdot\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = m\frac{d^2(-y\cdot\vec{e_y})}{dt^2} = -m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{e_y}$$

$$\Rightarrow -mg + \frac{k}{m}(y - y_0) = -m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}(y) = g + \frac{k}{m}y_0$$

POUR ENLEVER CE TERME, IL FAUT PRENDRE L'ORIGINE DU REPÈRE À LA MASSE DU RESSORT À L'ÉQUILIBRE

... ordre avec un second membre (solution forcée par le Poids ???)

1) Résolution de l'équation différentielle homogène

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

À NE PAS CONFONDRE AVEC UN POLYNÔME D'ORDRE 2 : $y_{1,2} = \dots$!!!

$$\Delta = -4\frac{k}{m} = i2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y_H(t) = e^{-0/2}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\right)$$

$$\boxed{y_H(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)}$$

FORME À PRIVILÉGIER CAR PLUS FACILE DE DÉTERMINER LES CONSTANTES AVEC LES CONDITIONS INITIALES

ou

$$y_H(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + D\right)$$

ou

$$y_H(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,(t - t_0)\right)$$

2) $g + \frac{k}{m} y_0$ est une constante [cf. cel. unisciel fr/... / ED linéaires à coefficients constants, avec second membre]

$$\Rightarrow y_p'' = y_p' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} y_p = g + \frac{k}{m} y_0$$

$$\Rightarrow y_p = g\frac{m}{k} + y_0$$

3) La solution générale de l'équation différentielle d'ordre 2 avec second membre

$$y_g(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

$$\Rightarrow y_g(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{gm}{k} + y_0$$

4) Détermination des constantes à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} y_g(0) = -y_{max} & (1) \\ \dot{y}_g(0) = 0 \quad (\text{pas de vitesse initiale}) & (2) \end{cases}$$

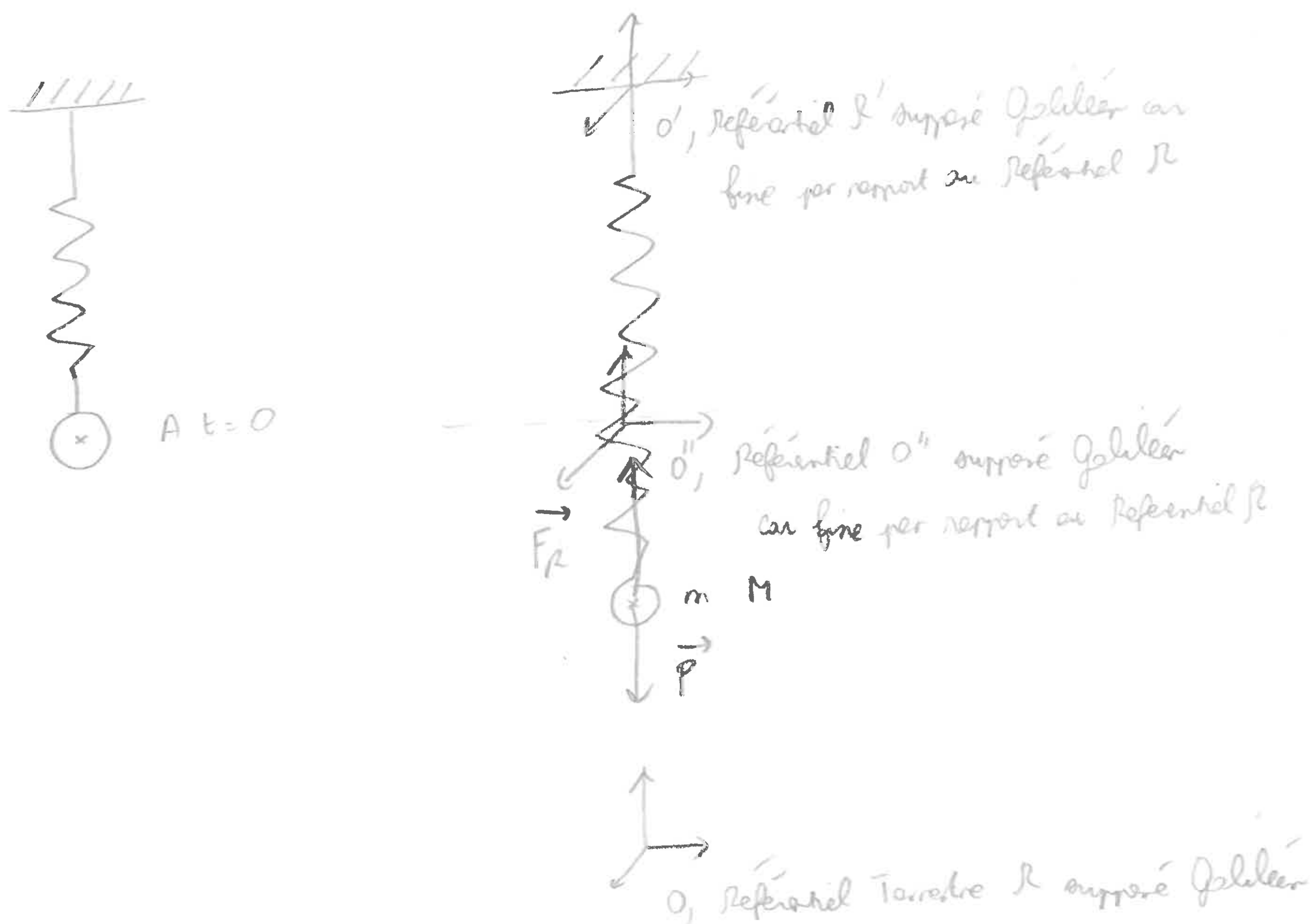
NE PAS CONFONDRE $y_0 = y_{eq}$ = LONGUEUR DU RESSORT À L'ÉQUILIBRE et $y(t=0) = y_{max}$

$$(1) \Rightarrow +A + \frac{gm}{k} + y_0 = y_{max} \Rightarrow A = (y_{max} - y_0) - \frac{gm}{k}$$

$$(2) \Rightarrow \sqrt{\tfrac{k}{g}}\,B + \frac{gm}{k} + y_0 = 0 \Rightarrow B = \left(-\frac{gm}{k} - y_0\right) \times \sqrt{\tfrac{g}{k}}$$

$$\Rightarrow y_g(t) = \left(-\frac{gm}{k} - y_0\right)\left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{k}}\,t\right) + \sqrt{\tfrac{k}{g}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{g}}\dots\right)\right) + y_{max}\cos\left(\sqrt{\tfrac{g}{k}}\,t\right)$$

Le pendule avec ressort en changeant de Référentiel d'étude :



Système = { masse m } étudiée dans le Référentiel R'' ~~supposé~~ Galiléen

LE RÉFÉRENTIEL ÉTANT GALILÉEN, LA SECONDE LOI DE NEWTON PEUT ÊTRE APPLIQUÉE

$$\sum \vec{F_{ext}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{= \vec{0}\ (\text{Système fermé})} \vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{P} + F_R = m \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

Projection dans la base cartésienne

⚠ ⚠ ⚠ SINON IL S'AGIT D'UNE ÉNERGIE POTENTIELLE !!!

$$\vec{P} = -mg\cancel{y}\,\vec{e_y}$$

$$\vec{F_R} = -k(\vec{l} - \vec{l_0}) = +ky\,\vec{e_y}$$

$$m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{e_y} = -m\ddot{y}\,\vec{e_y}$$

$$-\cancel{m}g \quad + \frac{k}{m} y = -m\, \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = -mg$$

Equation différentielle d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants et avec second membre

1) Résolution de l'équation homogène.

$$\ddot{y}_H + \frac{k}{m} y_H = 0$$

$$\Rightarrow y_H(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

2) Résolution de la solution particulière :

$$-mg = \text{constante}$$

$$\Rightarrow y_P = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_P = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y}_P = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} y_P = -mg$$

$$\Rightarrow y_P = -\frac{m^2 g}{k}$$

3) Etablissement de la solution générale (= solution homogène + solution particulière) :

$$y_g(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

$$= A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{m}}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{m}}\, t\right) - \frac{m^2 g}{k}$$

4) Détermination des constantes à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} y_g(0) = y_{max} \text{ (écartement maximal au départ)} & (1) \\ \dot{y}_g(0) = 0 \text{ (pas de vitesse initiale)} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow A - \frac{m^2 g}{k} = y_{max} \Rightarrow A = y_{max} + \frac{m^2 g}{k}$$

$$(2) \Rightarrow \sqrt{\frac{g}{m}}\, B - \frac{m^2 g}{k} = 0 \Rightarrow B = \frac{m^2 \sqrt{m}\, g}{k}$$

Ainsi, $y_g(t)' = \left(y_{max} + \frac{m^2 g}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{g}{m}}\, t\right) + \frac{m^2 \sqrt{m} g}{k} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{m}}\, t\right) = \frac{m^2 g}{k}\left(\cos\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\, t\right) + \sqrt{\frac{k}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{k}}\, t\right)\right)$

$+ \, y_{max} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$