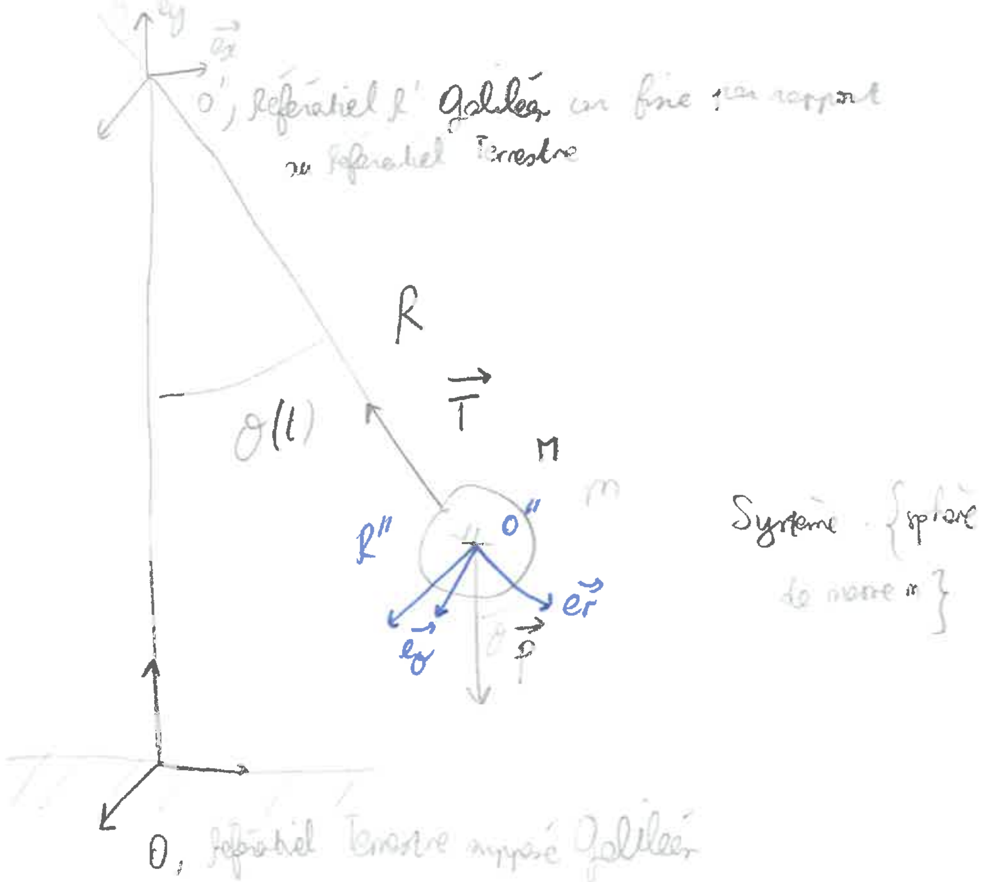
Etude d'un pendule simple, plusieurs méthodes sont possibles :



1) Etude en coordonnées cartésiennes à partir du Référentiel R' Galiléen car fixe par rapport au Référentiel Galiléen

$$\sum \vec{F_{ext}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{T} + \vec{P} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Projection dans la base cartésienne du Référentiel de R' :

$$\vec{T} = -T\sin(\theta)\vec{e_x} + T\cos(\theta)\vec{e_y}$$

$$\vec{P} = -mg\cdot\vec{e_y}$$

$$\vec{OM} = +R\sin(\theta)\vec{e_x} - R\cos(\theta)\vec{e_y}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=0}\sin(\theta)\vec{e_x} + R\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\vec{e_x} + R\sin(\theta)\underbrace{\frac{d\vec{e_x}}{dt}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{=0}\sin(\theta)\vec{e_x} + R\frac{d\theta}{dt}\sin(\theta)\vec{e_y} - R\cos(\theta)\underbrace{\frac{d\vec{e_y}}{dt}}_{=\vec{0}}$$

$$= R\dot{\theta}\left(\cos(\theta)\vec{e_x} + \sin(\theta)\vec{e_y}\right)$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = R\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e_x} + \sin\theta\,\vec{e_y}\right) + R\dot{\theta}^2\left(-\sin(\theta)\,\vec{e_x} + \cos(\theta)\,\vec{e_y}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} R\ddot{\theta}\cos(\theta) - R\dot{\theta}^2\sin(\theta) \\ R\ddot{\theta}\sin(\theta) + R\dot{\theta}^2\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Identification sur l'axe $\vec{e_x}$:

$$m\left(R\ddot{\theta}\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} - R\dot{\theta}^2\cancel{\sin(\theta)}\right) = -T\sin(\theta) \Rightarrow m\left(-\frac{R\ddot{\theta}}{\tan(\theta)} + R\dot{\theta}^2\right) = +T$$

Identification sur l'axe $\vec{e_y}$:

$$m\left(R\ddot{\theta}\sin(\theta) + R\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right) = T\cos(\theta) - mg$$

$$\Rightarrow m\left(R\ddot{\theta}\tan(\theta) + R\dot{\theta}^2\right) = T - \frac{mg}{\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}\left(R\ddot{\theta}\tan(\theta) + \cancel{R\dot{\theta}^2} + \frac{R\ddot{\theta}}{\tan(\theta)} - \cancel{R\dot{\theta}^2}\right) = -\frac{\cancel{m}g}{\cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\left(\sin(\theta) + \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}\right) = \frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\left(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right) = \frac{g}{R}\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin(\theta) = 0$$

Approximation petits angles ($\theta < 10°$). $\sin(\theta) \simeq \theta$

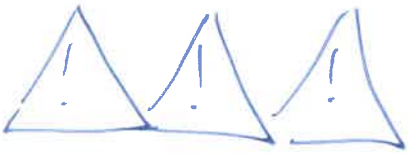
$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\theta \simeq 0$$

Equation différentielle du second ordre, sans second membre

$\Delta = b^2 - \cancel{4ac} = \frac{g^2}{R^2}$ $\quad b = 0$, C'EST C QUI EST EGAL À $-\frac{g}{R}$!!!

$\Delta = 4\frac{g}{R}$, $r_{1,2} = \frac{0 \pm 2\sqrt{\frac{g}{R}}}{2}$ $\Rightarrow \theta(t) = 1\times\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)\right) = C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t + D\right) = C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}(t\ldots\right.$

2) Etude en coordonnées polaires à partir du référentiel R'' Galiléen non Galiléen avec utilisation de la base polaire.



APPARITION DE FORCES FICTIVES QUI DOIVENT ÊTRE MODÉLISÉES AVEC LES DÉRIVÉES TEMPORELLES DES VECTEURS UNITAIRES DE LA BASE CARTÉSIENNE !!!

$$\vec{P} + \vec{T} = \sum \vec{F_{ext}}$$

LA 3ième LOI DE NEWTON EST MODIFIÉE POUR INCLURE LA $\sum \vec{F}_{fictives}$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F_{ext}}$$

$$m \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \vec{u_v} + m \|\vec{v}\| \frac{d\vec{u_v}}{dt} = \sum \vec{F_{ext}}$$

$$\Rightarrow m \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \vec{u_v} = \sum \vec{F_{ext}} - m \|\vec{v}\| \frac{d\vec{u_v}}{dt}$$

$$\Rightarrow m \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \cdot \vec{u_v} = \sum \vec{F_{ext}} + \sum \vec{F}_{fictives}$$

Dans la base polaire R'' :

$$\vec{P} = mg \cos(\theta) \vec{e_r} + mg \sin(\theta) \vec{e_\theta}$$

$$\vec{T} = -T\vec{e_r}$$

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}} = r \cdot \vec{e_r}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\|\vec{OM}\|}{dt} \cdot \vec{u_{OM}} + \|\vec{OM}\| \frac{d\vec{u_{OM}}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2(\|\vec{OM}\| \cdot \vec{u_{OM}})}{dt^2} = \frac{d^2\|\vec{OM}\|}{dt^2} \vec{u_{OM}} + 2\|\vec{OM}\| \frac{d\vec{u_{OM}}}{dt} + \|\vec{OM}\| \frac{d^2\vec{u_{OM}}}{dt^2} = \ddot{r}\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta}$$

Identification sur chacun des axes :

- Sur l'axe $\vec{e_r}$:

$$mg\cos(\theta) - T = m(\underbrace{\ddot{r}}_{=0} - r\dot{\theta}^2)$$

(le pendule fait une portion de cercle)

=) Cette équation permet de déterminer T en fonction de r et de θ

- Sur l'axe $\vec{e_\theta}$:

$$mg\sin(\theta) = m(\underbrace{2\dot{r}}_{=0}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

(le pendule fait une portion de cercle)

=> Cette équation permet d'obtenir $\theta = f(t)$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\sin(\theta) = \cancel{m}r\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{r}\sin(\theta) = 0$$

Approximation petits angles ($\theta < 5°$)

$$\sin(\theta) \simeq \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{r}\theta = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 0 + 4\frac{g}{r} > 0$$

$$r_{1,2} = \frac{0 \pm 2\sqrt{\frac{g}{r}}}{2}$$

$$\theta(t) = \underbrace{e^{0t}}_{1}\left(A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right)\right)$$

$$= A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right)$$

$$= C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t - D\right)$$

$$= C\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}(t - t_0)\right)$$

3) Avec le moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{r} \wedge (\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})$$

$$= r\vec{e_r} \wedge \dot{r}\vec{e_r} + r^2\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

(L'ÉTUDE DU MOMENT CINÉTIQUE DOIT SE FAIRE AVEC UN RÉFÉRENTIEL CENTRÉ SUR L'AXE DE ROTATION ⇒ UN CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL EST DONC NÉCESSAIRE !!)

⚠⚠⚠ L'UTILISATION D'UNE BASE NON CARTÉSIENNE EST TOUJOURS POSSIBLE À CONDITION D'INCLURE LES FORCES FICTIVES MODÉLISÉES PAR LES DÉRIVÉES DES VECTEURS UNITAIRES DE LA BASE NON CARTÉSIENNE

D'après le théorème du moment cinétique :

$$\vec{OM} \wedge \left(\sum \vec{F_{ext}}\right) = \vec{OM} \wedge \frac{d\left(m\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)\right)}{dt}$$

$$= \vec{OM} \wedge m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$$

$$= \vec{OM} \wedge m\left(\frac{d\left(\frac{d\|\vec{OM}\|}{dt}\cdot \vec{u_{OM}} + \|\vec{OM}\|\cdot\frac{d\vec{u_{OM}}}{dt}\right)}{dt}\right)$$

$$= \vec{OM} \wedge m\left(\frac{d^2\|\vec{OM}\|}{dt^2}\vec{u_{OM}} + 2\frac{d\|\vec{OM}\|}{dt}\cdot\frac{d\vec{u_{OM}}}{dt} + \|\vec{OM}\|\cdot\frac{d^2\vec{u_{OM}}}{dt^2}\right)$$

$$= \vec{OM} \wedge m\left(\ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}\right)$$

$$\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\ddot{\vec{e_r}} = \ddot{\theta}\vec{e_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

$$= \vec{r} \wedge m\left((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}\right)$$

$$= \vec{r} \wedge m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$$= (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\vec{e_z}$$

Forces appliquées sur le système décrites dans la base polaire du référentiel R'' :

$$\vec{T} = -T.\vec{e_r} \Rightarrow \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{P} = mg\cos(\theta)\vec{e_r} + mg\sin(\theta)\vec{e_\theta} \Rightarrow \vec{OM} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge (mg\cos(\theta)\vec{e_r} + mg\sin(\theta)\vec{e_\theta}) = rmg\sin(\theta)\vec{e_z}$$

En identifiant sur l'axe $\vec{e_\theta}$: (car le pendule décrit une portion de cercle

$$\cancel{r}\cancel{m}\left(\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{=0} + r\ddot{\theta}\right) = \cancel{r}\cancel{m}g\sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{r}\sin(\theta)$$

Approximation petits angles $(\theta < 5°) \Rightarrow \sin(\theta) \simeq \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{r}\theta = 0$$

Equation différentielle du second ordre avec terme source :

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}(t - t_0)\right)$$

4) Etude avec les énergies :

$E_{pp} = m g h = \Delta E_{pp} - E_{pp_0} = -\int_0^t \vec{P} \cdot \vec{dr} - E_{pp_0}$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Pour un système sans forces non conservatives

$E_m = E_c + E_{pp} = \cancel{0}$ constante (C'EST ΔE_m QUI VAUT 0 ET NON E_m !!!)

⚠⚠⚠ LÀ ENCORE L'ÉTUDE PEUT SE FAIRE DANS UNE BASE NON GALILÉENNE À CONDITION D'INCLURE LES FORCES FICTIVES, MODÉLISÉES PAR LES DÉRIVÉES DES VECTEURS UNITAIRES DE LA BASE NON CARTÉSIENNE

L'ÉTUDE EST SIMPLIFIÉE DANS LA BASE POLAIRE CAR INCLU L'ÉLÉMENT D'INTÉGRATION $\vec{dr} = d(\vec{r}) = d\left(r\cos(\theta) \cdot \vec{e_x} + r\sin(\theta)\vec{e_y}\right) = \dots$

Etude dans la base polaire :

$\vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e_r} \\ \vec{e_\theta} \end{matrix} = r\vec{e_r}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\|\vec{OM}\|}{dt} \cdot \vec{u_{OM}} + \|\vec{OM}\| \frac{d\vec{u_{OM}}}{dt}$

$= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\underbrace{\dot{r}^2}_{=0} + (r\dot{\theta})^2}\right)^2 = \frac{1}{2} m (r\dot{\theta})^2$

$E_{pp} = \Delta E_{pp} - E_{pp_0} = \int_{\theta_0}^{\theta} \left(m g \cos(\theta)\vec{e_r} + m g \sin(\theta)\vec{e_\theta}\right) \underbrace{\vec{dr}}_{= r\dot{\theta}\vec{e_\theta}} - m g \underbrace{h_0}_{= r\cos(\theta_0)}$

$= \int_{\theta_0}^{\theta} r m g \dot{\theta} \sin(\theta)\, d\theta - r m g \cos(\theta_0)$

$= r m g \left[-\cos(\theta)\right]_{\theta_0}^{\theta} - m g \cos\theta_0 = r m g\left(\cancel{\cos(\theta_0)} - \cos(\theta)\right) - r m g \cancel{\cos}(\theta_0)$

En l'absence de forces non conservatives :

$$E_M = E_c + E_{pp} = \cancel{0} \text{ Constante } = E_{pp_0} = + mgr\cos(\theta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \int -P\,d\vec{r} + E_{pp_0} = \cancel{0} \text{ Constante}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - rmg\cos(\theta) = \cancel{0} \text{ constante}$$

EN DERIVANT PAR RAPPORT AU TEMPS :

$$\frac{1}{2}mr^2(2\dot{\theta})\ddot{\theta} + rmg\sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{m}r^{\cancel{2}}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \cancel{r}\cancel{m}g\sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\sin(\theta) = 0$$

NE PERMET PAS DE CONCLURE, IL FAUT EFFECTUER D'ABORD UN D.L. SUR $\cos\theta$ D'ORDRE 2

$$\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - rmg\cos(\theta) = + rmg\cos(\theta_0)$$

$$\cos(\theta) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - rmg\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \simeq rmg\cos(\theta_0)$$

PUIS EN DÉRIVANT PAR RAPPORT AU TEMPS :

$$\frac{1}{2}mr^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + rmg\,\theta\dot{\theta} = 0$$

CE QUI PERMET DE DIVISER DE PART ET D'AUTRE DE L'EQUATION PAR $\dot{\theta}$ ET DE RETROUVER L'EQUATION DIFFERENTIELLE CLASSIQUE POUR UN PENDULE SIMPLE :

$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}r^{\cancel{2}}\cancel{2}\ddot{\theta} + r\cancel{m}g\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{r}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}(t - t_0)\right)$$