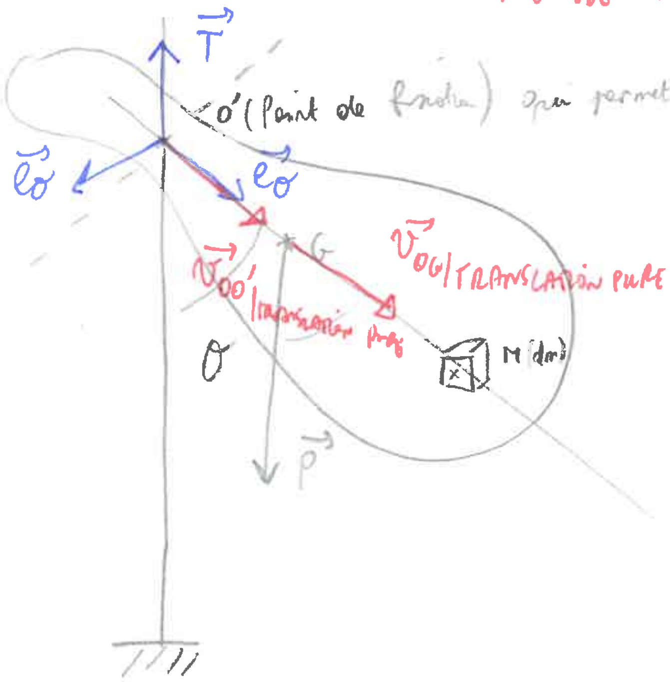
Analyse classique du pendule pesant, d'après [Youtube (Jean-Julien Fleck, PCSI, physique, Kléber / DiaN, Pendule pesant]

LE CENTRE DE ROTATION O' ET LE CENTRE DE MASSE G DU SYSTÈME NE SONT PAS IDENTIQUES :

⇒ LES THÉORÈMES DE KONIG NE SONT PAS DIRECTEMENT APPLICABLES ??? (EN RÉALITÉ ILS LE SONT TOUJOURS POUR UN SOLIDE INDÉFORMABLE CAR $\vec{v}_{OO'}|_{translation} = \vec{v}_{OG}|_{translation}$



o' (Point de fixation) qui permet de définir un repère et l'angle θ

Système {patatoïde}

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

Inventaire des :

- Forces (ÉTUDE D'UNE TRANSLATION PURE DU SYSTÈME)

  $\vec{T} + \vec{P}$

- Moments (ÉTUDE D'UNE ROTATION PURE DU SYSTÈME)

$\vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{T}) = \vec{0}$

G NON G

$\mathcal{M}_{/O'}(\vec{P}) = r_G \vec{e_r} \wedge (mg\cos(\theta)\vec{e_r} + mg\sin(\theta)\vec{e_\theta})$

$= mg r_G \sin(\theta) \vec{e_z}$

Application de la 2nd loi de Newton (pour l'étude des translations pures)

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \quad \text{(les deux forces se compensent)}$$

Application du théorème des moments cinétiques (pour l'étude des rotations pures)

$$\vec{\mathcal{M}}_{/0'}\left(\sum \vec{F_{ext}}\right) = \frac{d\vec{L}_{/0'}}{dt}$$

⚠⚠⚠ ON UTILISE TRÈS SOUVENT LA BASE POLAIRE AVEC LES MOMENTS CAR IL S'AGIT D'ÉTUDIER DES ROTATIONS (⚠⚠⚠ À INCLURE LES FORCES FICTIVES OBTENUES PAR LES DÉRIVATIONS DES VECTEURS DE LA BASE UTILISÉE)

Système fermé et base polaire utilisée

$$\left(mgr_G\cancel{\cos(\theta)}\right) + mgr_G\sin(\theta)\Big)\vec{e_z} = m\vec{e_r}\wedge\left(\overset{=0}{\ddot{r}}\vec{e_r} + 2\overset{=0}{\dot{r}}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}\vec{e_r}\right)$$

$$\Rightarrow mgr_G\left(\cancel{\cos(\theta)} + \sin(\theta)\right)\vec{e_z} = mr^2\ddot{\theta}\vec{e_z}$$

$$mr^2 = I_L$$

$$\Rightarrow mgr_G\left(\cancel{\cos(\theta)} + \sin(\theta)\right) = I_L\ddot{\theta}$$

Utilisation de l'approximation des petits angles ($\theta < 5°$)

$$\cos(\theta) \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\sin\theta \sim \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

$$\Rightarrow mgr_G(\cancel{1} + \theta) = I_L\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgr_G}{I_L}\theta = -\cancel{\frac{mgr_G}{I_L}}\,0$$

Equation différentielle d'ordre 2 avec second membre :

1) Resolution de l'équation homogène

$$\ddot{\theta}_H + \frac{mgr_G}{I_L}\theta_H = 0$$

$$\Rightarrow \theta_H = A\cos\left(\sqrt{\frac{mgr_G}{I_L}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{mgr_G}{I_L}}\,t\right)$$

2) ~~Resolution de la solution particulière~~

~~$\theta_p(t) = $ constante en t~~

~~$\Rightarrow \dot{\theta}_p(t) = 0$~~

~~$\Rightarrow \ddot{\theta}_p(t) = 0$~~ -1

PASSAGE AUX ÉNERGIES

GRÂCE À L'INTÉGRALE

PREMIÈRE (⚠ ⚠ ⚠ SPATIALE

ÉQUIVALENT EN MULTIPLIANT PAR $\vec{v}$: $d\vec{\ell} = \vec{v} \cdot dt$, C'EST $\longrightarrow$ ET NON TEMPORELLE) DU MOUVEMENT

POUR CELA QU'ON MULTIPLIE PAR $\dot{\theta}$ AVANT D'INTÉGRER SUR dt

1) Sans Second Membre :

a) Si le DL du $\sin(\theta)$ a été fait

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\times\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}\dot{\theta} + \omega_0^2 \theta\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)}{dt} + \frac{\omega_0^2}{2}\frac{d(\theta^2)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\theta^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{I_\Delta}\theta\right) = 0$$

$$\times I_\Delta \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2}_{\text{Énergie cinétique de rotation de tous les points par rapport à } O'} + \underbrace{\frac{1}{2} mg\,\theta^2}_{\text{Énergie cinétique de rotation du centre de masse } G \text{ par rapport à } O'}\right) = 0$$

3) Obtention de la solution générale :

$$\theta_g(t) = \theta_H(t) + \theta_p(t)$$

$$= A\cos(\nu_0 t) + B\sin(\nu_0 t) - 1 \quad \text{avec } \nu_0 = \sqrt{\frac{mgr_G}{I_L}}$$

4) Obtention de A et de B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta_g(t=0) = \theta_0 \text{ (angle initial = perturbation initiale)} & (1) \\ \dot{\theta}_g(t=0) = 0 \text{ (pas de vitesse angulaire initiale)} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \theta_0 = A - 1 \Rightarrow A = \theta_0 + 1$$

$$(2) \Rightarrow 0 = \nu_0 B - 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\nu_0}$$

$$\Rightarrow \theta_g(t) = (\theta_0 + 1)\cos(\nu_0 t) + \frac{1}{\nu_0}\sin(\nu_0 t) - 1$$

$$\theta_0 = A$$

$$0 = \nu_0 B \Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow \theta_g(t) = \theta_0 \cos(\nu_0 t)$$

2

b) Sans faire le DL de sin(θ)

$$I_\Delta \ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$$

$\times \dot{\theta}$

$$\Rightarrow I_\Delta \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg \dot{\theta} \sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow I_\Delta \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(mg \cos(\theta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2}_{\text{Energie cinétique de rotation des points par rapport à } O'} + \underbrace{mg \cos(\theta)}_{\text{Energie potentielle du solide (appliquée au point } G)}\right) = 0$$

COMME LES DEUX DÉVELOPPEMENTS SONT SIMILAIRES (L'UN AVEC LE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ, L'AUTRE SANS LE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ)

$\Rightarrow mg \cos(\theta) = E_{pp}$ (Solide au point G (centre de masse))

$||$

$\frac{1}{2} mg \theta^2 = E_c$ (Solide au point G)

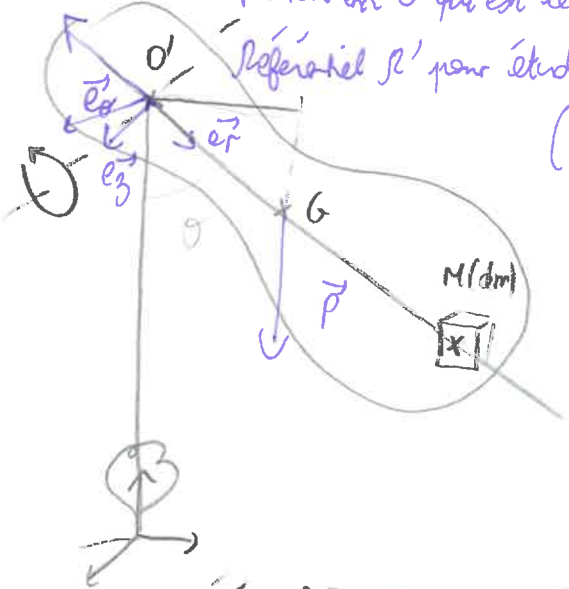
CELA S'EXPLIQUE CAR L'ÉNERGIE MÉCANIQUE DU POINT G EST CONSTANTE ?? : $E_m(G) = \text{Constante} \Rightarrow \frac{d(E_m(G))}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_c(G)}{dt} + \frac{dE_{pp}(G)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_{pp}(G)}{dt} = -\frac{dE_c(G)}{dt}$

AINSI LES THÉORÈMES DE KONIG DOIT ÊTRE MODIFIÉ SI LE CENTRE DE ROTATION (O) N'EST PAS LE CENTRE DE M(G) COMME DANS UN PENDULE PESANT ??? (SAUF DANS LE CAS D'UN SOLIDE INDÉFORMABLE)

$\vec{T}$ (Point de fixation en O' qui est le centre de la rotation à partir duquel O est défini !!!

Référentiel R' pour étudier les rotations (et les moments) en base polaire !!!

(⚠⚠⚠ À L'INTRODUCTION DE FORCES FICTIVES)



O, Référentiel Terrestre, supposé Galiléen

– 1er théorème de Konig : $\vec{\mathcal{M}}_{0/0'}(\Sigma \vec{F_{ext}}) = \frac{d\vec{L_\Sigma}}{dt} = \frac{d\vec{L_{OO'}}}{dt} + \frac{d(\Sigma \vec{L_{O'M_i}})}{dt}$

$$\vec{O'M} \wedge \vec{P} = m_{total} \times \vec{0} + \frac{d\vec{L_{O'G}}}{dt} + \Sigma \frac{d\vec{L_{GM_i}}}{dt}$$

Projection en base polaire (la plus adaptée aux rotations mais ⚠⚠⚠ aux forces fictives introduites)

$\longrightarrow$

$$r_G\vec{e_r} \wedge (mg\cos(\theta)\vec{e_r} + mg\sin(\theta)\vec{e_\theta}) = m_G r_G \vec{e_r} \wedge (\ddot{r}_G\vec{e_r} + 2\dot{r}_G\dot{\theta}_G\vec{e_\theta} + r_G\ddot{\theta}_G\vec{e_\theta} - r_G\dot{\theta}^2\vec{e_r}) + \Sigma m_i r_i \vec{e_r} \wedge (\ddot{r}\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r})$$

$\theta_G = \theta$ mais $r_G \neq r$!!!

$$\Rightarrow r_G m_G \sin(\theta)\vec{e_z} = m_G r_G^2 \ddot{\theta}\vec{e_z} + \Sigma m_i r^2 \ddot{\theta} \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow r_G m_G \sin(\theta) = I_{O'G}\ddot{\theta}_G + \Sigma I_{O'M_i}\ddot{\theta}_{O'M_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(E_{PP}) = \Sigma m_i r_i^2 \ddot{\theta}_i = I_{TOTAL}\ddot{\theta}_{TOTAL}$$

Tous les points y compris G !!!

⚠ ⚠ ⚠

DANS LES THÉORÈMES DE KÖNIG, (QUI NE CONCERNENT QUE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE), PEU IMPORTE À PARTIR DE QUEL POINT SE FAIT LA DÉCOMPOSITION, IL FAUT OBTENIR LA VITESSE DE TRANSLATION TOTALE ET LA VITESSE DE ROTATION TOTALE DE TOUT LE SOLIDE !!!

- Développement des théorèmes de König à partir de O' le centre de la rotation

1er théorème de König : $\vec{M}_{/O'}(\Sigma \vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{L}_{/O'}(\Sigma)}{dt}$

$\Rightarrow \vec{O'M} \wedge \vec{P} = \frac{d\vec{L}_{O'O'}}{dt} + \Sigma \frac{d\vec{L}_{O'M}}{dt}$ ($\frac{d\vec{L}_{O'O'}}{dt} = \vec{0}$)

$= \frac{d\vec{L}_{O'G}}{dt} + \Sigma \frac{d\vec{L}_{GM_i}}{dt}$

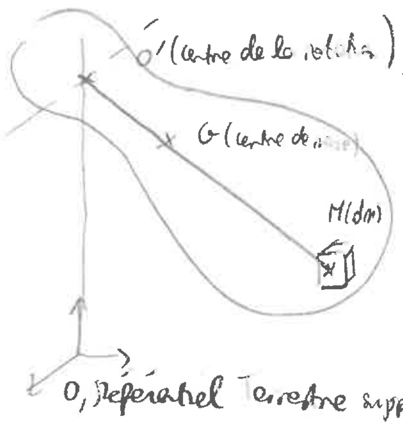
2ième théorème de König : $\frac{1}{2} m_\Sigma v_\Sigma^2 = \frac{1}{2} m_\Sigma (\vec{v}_{OO'} + \Sigma \vec{v}_{O'M_i})^2$

$= \frac{1}{2} m_\Sigma v_{OO'}^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i v_{O'M_i}^2 + \Sigma m_i \vec{v}_{OO'} \cdot \vec{v}_{O'M_i}$

$\vec{v}_{OO'} = \vec{0}$ (pas de rotation et pas de translation)

$= \frac{1}{2} I_{total} \dot{\theta}_{total}^2$

- Développement des théorèmes de König à partir du centre de masse G



1er Théorème de König : $\vec{M}_{/O'}(\Sigma \vec{F}_{ext}) = \frac{d\vec{L}_{/O'}(\Sigma)}{dt}$ ⚠⚠⚠ SANS G !!!

$\Rightarrow \vec{O'M} \wedge \vec{P} = \frac{d\vec{L}_{O'}(O'G)}{dt} + \frac{\Sigma d\vec{L}_{O'}(O'M_i)}{dt}$

$\Rightarrow \vec{O'M} \wedge \vec{P} = \frac{d\vec{L}_{O'}(\Sigma)}{dt}$!!!

2ième Théorème de König

$\frac{1}{2} m_\Sigma v_\Sigma^2 = \frac{1}{2} m_\Sigma (\vec{v}_{OG} + \Sigma \vec{v}_{GM_i})^2 = \frac{1}{2} m_\Sigma v_{OG}^2 + \frac{1}{2} \Sigma v_{GM_i}^2 + m_\Sigma \vec{v}_{OG} \cdot \Sigma \vec{v}_{GM_i}$

$\frac{1}{2} m_\Sigma v_\Sigma^2$!!!

- Comme $\dfrac{d(L_{O'O'})}{dt} = \dfrac{d\, m_\Sigma \left(\underbrace{\overrightarrow{O'O'}}_{=\vec{0}} \wedge \underbrace{\dfrac{d\overrightarrow{O'O'}}{dt}}_{=\vec{0}} \right)}{dt}$

LA DÉCOMPOSITION NE SE FAIT GÉNÉRALEMENT PAS PAR RAPPORT AU POINT DE ROTATION O' MAIS PEUT SE FAIRE PAR RAPPORT À N'IMPORTE QUEL POINT COMME LE CENTRE DE MASSE G DÈS LORS QUE LE POINT SOIT DANS LE SOLIDE !!!

- DÈS LORS QUE LE SOLIDE EST INDÉFORMABLE, LA VITESSE DE TRANSLATION PURE DU POINT O' ET ÉGALE À LA VITESSE DE TRANSLATION PURE DE G

$\Rightarrow \dot{\theta}_{\text{TOTALE}} = \sum \dot{\theta}_{GM_i} = \sum \dot{\theta}_{O'M_i}$ CAR :

$$\vec{v}_\Sigma = \sum \overrightarrow{v_{OM_i}} = \overrightarrow{v_{OO'}} + \sum_{\text{sans } O'} \overrightarrow{v_{O'M_i}}$$

$$= \overrightarrow{v_{OG}} + \overrightarrow{v_{GO'}} + \sum \overrightarrow{v_{O'M_i}}$$

$$= \overrightarrow{v_{OG}} + \overrightarrow{v_{GO'}} + \overrightarrow{v_{O'G}} + \sum \overrightarrow{v_{GM_i}}$$

$$= \overrightarrow{v_{OG}} - \cancel{v_{O'G}} + \cancel{v_{O'G}} + \sum \overrightarrow{v_{GM_i}}$$

⚠⚠⚠ POUR LES MOMENTS : DEUX FAÇONS D'OBTENIR LES ÉNERGIES :

1) Par l'intégrale première du mouvement

Ex : à partir de l'équation du mouvement d'un pendule pesant :

$$\ddot{\theta}_g(t) + \frac{mg}{I_{TOTAL}} \sin(\theta(t)) = 0$$

$\times \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta}(t) + \frac{mg}{I_{TOTAL}} \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{mg}{I_{TOTAL}} \cos(\theta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} I_{TOTAL} \dot{\theta}^2}_{Ec\ de\ rotation} + \underbrace{mg \cos(\theta)}_{Epp}\right) = 0$$

2) A partir du second théorème de König :

Exemple : lancé d'un ballon de rugby qui tourne sur lui-même

O' (centre de la rotation) et non G (centre de masse)

$$Ec = \frac{1}{2} m_{TOTAL} v_{TOTAL}^2 = \frac{1}{2} m_{total} v_{TOTAL}^2 \Big|_{TRANSLATION\ PURE} + \frac{1}{2} m_{total} v_{TOTAL}^2 \Big|_{ROTATION\ PURE}$$

$$= \frac{1}{2} m_{total} v_{translation}^2 + \frac{1}{2} I_{TOTAL} \dot{\theta}_{TOTAL}^2$$

$v_{OO'}^2$

en général : centre de la rotation de ... (on) v_{OG}^2 (centre de masse)

Tourne autour de lui-même (⚠⚠⚠ le centre de la rotation est O')

⚠⚠⚠ DÉCOMPOSITION DU MOUVEMENT SUIVANT O' OU G ... $= \vec{v}_{OO'} = \vec{v}_{OG}$!!!