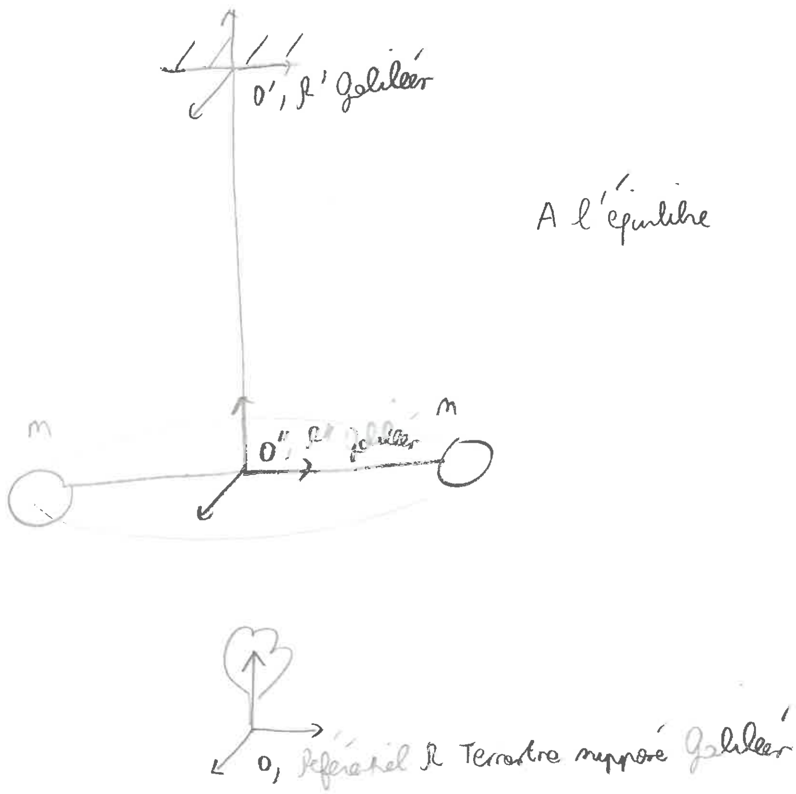
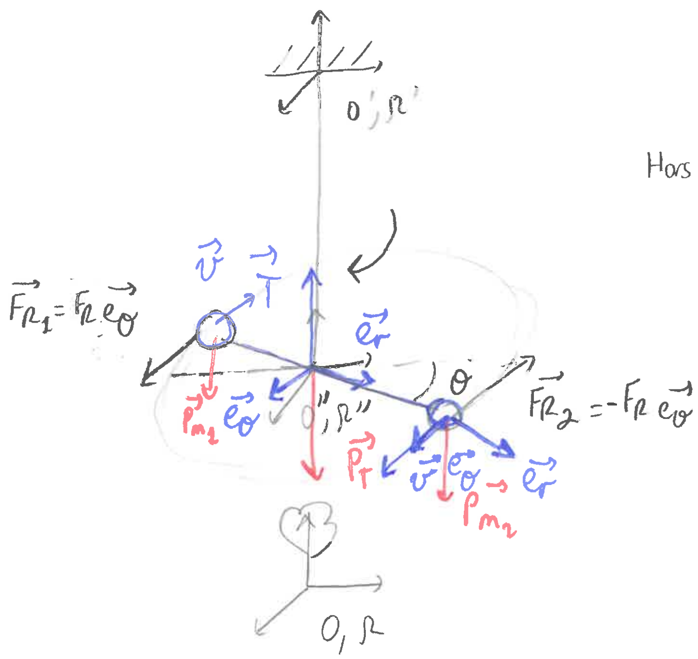
Le pendule de torsion



A l'équilibre



Hors équilibre (après avoir décollé les masses d'un angle initial θ_0, sans donner aux masses une vitesse initiale)

Système = { tige + 2 masses }

= Système composé de plusieurs points

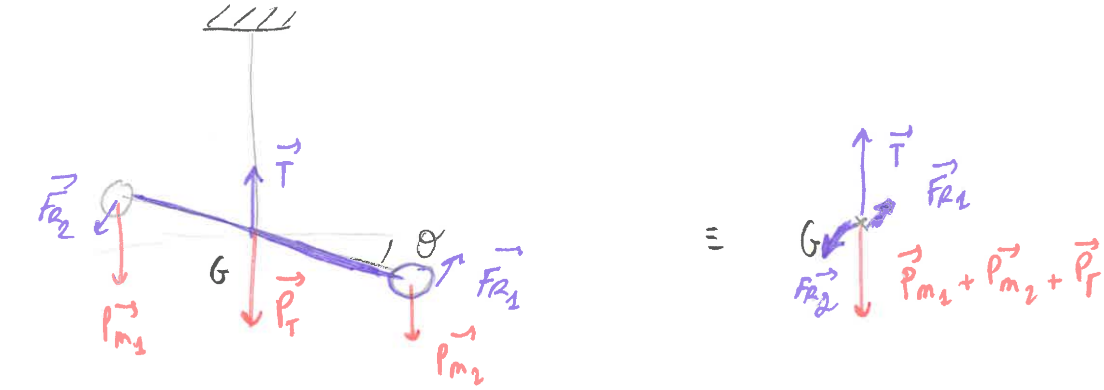
Etude des translations pures = Toutes les forces sont projetées au même point (centre de masse du système)
(≡ LE SYSTÈME EST CONSIDÉRÉ COMME UN POINT MATÉRIEL)

Etude des rotations pures = Les forces sont projetées sur des axes en fonction du centre de la rotation
(utilisation des moments de force)
(≡ LE SYSTÈME EST CONSIDÉRÉ COMME UN ENSEMBLE DE PLUSIEURS DROITES

Etudes des translations pures :

Application de la Seconde loi de Newton dans un Référentiel Galiléen :

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$



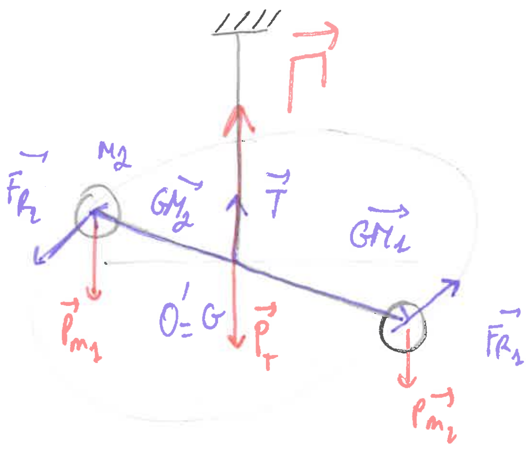
$$\Rightarrow \sum \vec{F_{ent}} = \vec{0}$$

Aucune translation pure du pendule de torsion

Etude des rotations pures :

DÉFINITION DES MOMENTS À PARTIR DU CENTRE DE ROTATION

ICI $O' = G$



$$\vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{T}) = \vec{O'O'} \wedge \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{P}) = \vec{O'O'} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{F_{R_1}}) = \vec{O'M_1} \wedge \vec{F_{R_1}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{F_{R_2}}) = \vec{O'M_2} \wedge \vec{F_{R_2}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{F_{R_1}}) + \vec{\mathcal{M}}_{/O'}(\vec{F_{R_2}}) = \vec{O'M_1} \wedge \vec{F_{R_1}} + \vec{O'M_2} \wedge \vec{F_{R_2}}$$

D'après [fento-physique.fr / Théorème du moment cinétique, Jimmy Roussel, ...] le moment resultant de deux forces de rotations opposées est appelé couple

$\vec{F_{R_2}} = -\vec{F_{R_1}}$

$$= \vec{O'M_1} \wedge \vec{F_{R_1}} - \vec{O'M_2} \wedge \vec{F_{R_1}}$$

$$= (\vec{M_2O'} + \vec{O'M_1}) \wedge \vec{F_{R_1}}$$

$$= \vec{M_2M_1} \wedge \vec{F_{R_1}}$$

$$\Gamma = \vec{M_1M_1} \wedge \vec{F_{R_1}}$$

En utilisant le théorème des moments cinétiques :

$$\mathcal{M}_{/O'}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \frac{d\vec{L}_{/O'\Sigma}}{dt} = \frac{d\left(m \sum \vec{O'M} \wedge \frac{d \sum \vec{O'M}}{dt}\right)}{dt} = \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{=0 \text{ (Système fermé)}} \sum \vec{O'M} \wedge \frac{d \sum \vec{O'M}}{dt} + m \frac{d\left(\sum \vec{O'M} \wedge \frac{d \sum \vec{O'M}}{dt}\right)}{dt}$$

$$= \underbrace{m\left(\frac{d \sum \vec{O'M}}{dt} \wedge \frac{d \sum \vec{O'M}}{dt}\right)}_{= \vec{0} \text{ (vecteurs colinéaires)}} + m \sum \vec{O'M} \wedge \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{M_2M_1} \wedge \vec{F_R}}_{= \vec{\Gamma}} = m\left(\vec{O'M_1} + \underbrace{\vec{O'M_2}}_{= -\vec{O'M_1}}\right) \wedge \frac{d^2\left(\vec{O'M_1} + \underbrace{\vec{O'M_2}}_{= -\vec{O'M_1}}\right)}{dt^2}$$

$= \vec{\Gamma}$ (couple car deux forces opposées appliquées sur deux endroits différents de l'objet)

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\Gamma}}_{= \vec{O'M_1} \wedge \left(\vec{F}_{R_1} - \vec{F}_{R_2}\right)} = 2m\, \vec{O'M_1} \wedge \frac{d^2(\vec{O'M_1})}{dt^2}$$

Projection dans la base polaire

$\longrightarrow$ linéarisé !!

$$\cancel{r}\vec{e_r} \wedge \left(-2 \frac{\overbrace{\mathcal{C}}^{\text{coefficient de rappel de torsion}}}{\cancel{r}} \theta \, \vec{e_\theta}\right) = 2m\, r\vec{e_r} \wedge \frac{d^2(r\vec{e_r})}{dt^2}$$

$$\Rightarrow -\cancel{2}\cancel{r}\mathcal{C}\theta\vec{e_z} = 2m\, r\vec{e_r} \wedge \left(\ddot{r}\vec{e_r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}\right)$$

$$\Rightarrow -\mathcal{C}\theta\vec{e_z} = mr\Big(\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta}}_{= 0 \text{ (le fil est inextensible)}} + r\ddot{\theta}\Big)\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow -\mathcal{C}\theta = mr^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\mathcal{C}}{mr^2}\theta = 0$$

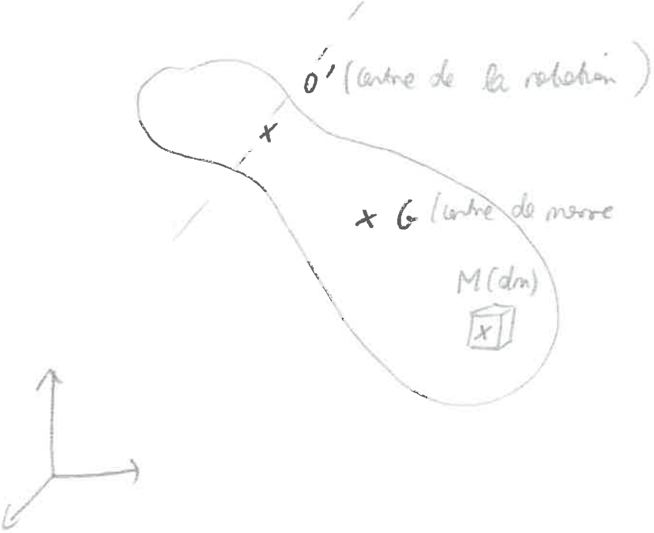
Équation différentielle d'ordre 2 sans second membre : $= A\cos\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}}\, t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_\Delta}}\, t\right)$

Passage aux énergies :

$$E_M = E_c + E_{pp}$$

$$= \frac{1}{2} m_{total}\, v_{\Sigma OM}^2 = \frac{1}{2} m_{total} \left(\vec{v}_{OO'} + \vec{v}_{\Sigma O'M}\right)^2 = \frac{1}{2} m_{total} \left(v_{OO'}^2 + v_{\Sigma O'M}^2 + 2\,\vec{v}_{OO'} \cdot \vec{v}_{\Sigma O'M}\right)$$

SI $O' \neq G$ ALORS LE THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE N'EST PAS APPLICABLE EST $\vec{v}_{OO'} \cdot \vec{v}_{\Sigma O'M} \neq \vec{0}$!!!



SI LE CENTRE DE LA ROTATION $O' \neq$ CENTRE DE MASSE G

(COMME DANS LE CAS DU PENDULE PESANT),

LE PROBLÈME SE COMPLEXIFIE :

$\Rightarrow$ THÉORÈMES DE KONIG NON SIMPLIFIÉS ET

DIRECTEMENT APPLICABLES !!!

Passage aux energies pour le pendule de torsion

O' (centre de la rotation) = G (centre de masse) donc theoremes de Konig directement applicable !!!

$$E_c = \frac{1}{2} m_{total}\, v_i^2 = \frac{1}{2} m_{total} \sum v_{OM}^2 = \frac{1}{2} m_{total} \left(\vec{v}_{OO'} + \sum \vec{v}_{O'M} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_{total}\, v_{OO'}^2 + \frac{1}{2} m_{total} \sum v_{O'M}^2 + m_{total}\, \vec{v}_{OO'} \cdot \sum \vec{v}_{O'M}$$

DANS LE CAS D'UN PENDULE DE TORSION, LE CENTRE DE LA ROTATION O' EST EGAL AU CENTRE DE MASSE G

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m_{total}\, v_{OG}^2 + \frac{1}{2} m_{total} \sum v_{GM_i}^2 + \left(\sum m_i\right) \vec{v}_{OG} \cdot \sum \vec{v}_{GM}$$

$$= \frac{1}{2} m_{total}\, v_{OG}^2 + \frac{1}{2} \sum m_i\, v_{GM}^2 + \underbrace{\sum m_i\, \vec{v}_{GM_i}}_{= \vec{0}} \cdot \vec{v}_{OG}$$

(d'après le théorème du centre d'inertie)

$$= \frac{1}{2} m_{total}\, v_{OG}^2 + \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2$$

$E_{pp} = 0$ (pas de changement d'hauteur du système au cours de son mouvement)

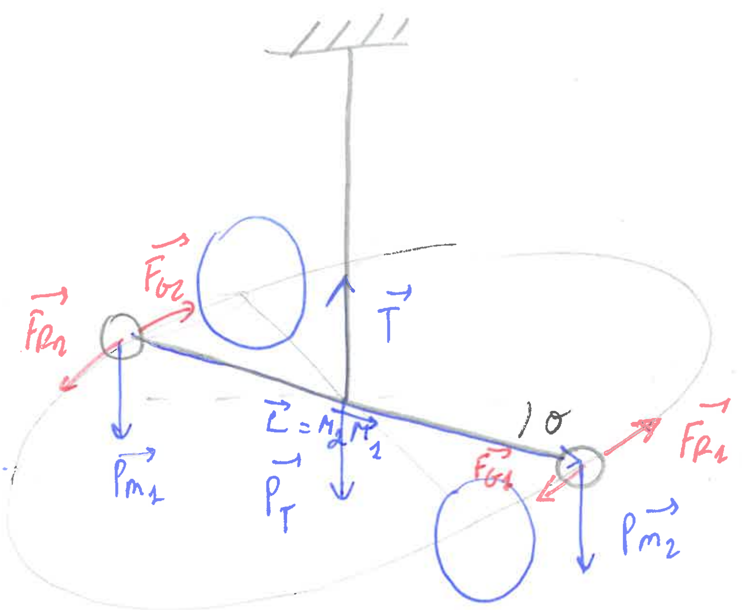
$$\Rightarrow \underset{\text{Constante}}{E_M} = E_c + E_{pp} = E_c$$

Constante (en l'absence de force de frottements)

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} I_\Delta \dot{\theta}^2$$

Pendule de torsion qui evalue la force Gravitationnelle de 2 boules ajoutées (EXPÉRIENCE DE CAVENDISH)

Développement classique de type : [Youtube (Jean-Julien Fleck, PCSI, Physique, Kepler, DiaN, Pendule de torsion, ...]



Système : { barre + masses }

Référentiel Terrestre supposé galiléen

Inventaire de forces (mouvement de translation) : $\vec{P_{m_1}}$, $\vec{P_{m_2}}$, $\vec{P_T}$, $\vec{T}$

2nd loi de Newton :

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P_{m_1}} + \vec{P_{m_2}} + \vec{P_T} + \vec{T} = \vec{0}$$

Inventaire des moments (mouvement de rotation) : $\vec{\Gamma}_{rappel} = -C\theta\vec{e_z}$

$\vec{\mathcal{M}}_{/G}(\vec{P_{m_1}}) = \vec{\mathcal{M}}_{/G}(\vec{P_{m_2}}) = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{P_T}) = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{T})$

(Car toutes ces forces s'appliquent directement sur l'axe des moments)

En prenant les boules de telle manière à accentuer l'angle (= à s'opposer au Moment de Torsion)

$$\vec{\Gamma}_{gravitationnel} = \vec{M_2 M_1} \wedge (+)\vec{F_G}$$

$$= 2r\vec{e_r} \wedge \frac{G\,m\,M_{Boule}}{d_{Boule}^2} \cdot \vec{e_\theta}$$

$$= 2rm \frac{GM_{Boule}}{d_{Boule}^2} \vec{e_z}$$

Théorème du moment cinétique scalaire par rapport à l'axe $\vec{L}$ dirigé par $\vec{e_z}$:

$$J_\Delta \ddot{\theta}\vec{e_z} = \vec{\Gamma}_{rappel} + \vec{\Gamma}_{gravitationnel} = -C\theta + 2rm\frac{GM_{Boule}}{d_{Boule}^2}$$

Equation differentielle d'ordre 2 avec second membre :

1) Resolution de l'equation homogene :

$$\ddot{\theta}_H + \frac{\mathcal{C}}{I_L}\theta_H = 0$$

$$\Rightarrow \theta_H = A\cos\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_L}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_L}}\,t\right)$$

2) Resolution de la solution particuliere

$$2rm\frac{GM_B}{d_B^2} = \text{Constante en } \theta$$

$$\Rightarrow \theta_p = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_p = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{C}}{I_L}\theta_p = 2rm\frac{GM_B}{d_B^2}$$

$$\Rightarrow \theta_p = \frac{2I_L rm\,GM_B}{\mathcal{C}\,d_B^2}$$

3) Obtention de la solution generale

$$\theta_g(t) = \theta_H(t) + \theta_p(t)$$

$$\Rightarrow \theta_g(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_L}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_L}}\,t\right) + \frac{2I_L rm\,GM_B}{\mathcal{C}\,d_B^2}$$

$$\Rightarrow \theta_g(t) = A\cos\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right) + B\sin\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right) + \omega_0\frac{rm\,GM_B}{\pi\,d_B^2} \quad \text{avec } \omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\mathcal{C}}{I_L}}$$

4) Determination de A et de B grace aux conditions initiales (ou plus generalement aux conditions aux limites)

$$\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 & \text{(un écart à l'equilibre initialement)} \quad (1) \\ \dot{\theta}(t=0) = 0 & \text{(pas de vitesse initiale)} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \theta_g(0) = \theta_0 = A + \omega_0\frac{rm\,GM_B}{\pi\,d_B^2} \Rightarrow A = \theta_0 - \omega_0\frac{rm\,GM_B}{\pi\,d_B^2}$$

$$(2) \Rightarrow \dot{\theta}_g(0) = 0 = B\frac{\omega_0}{2\pi} + \omega_0\frac{rm\,GM_B}{\pi\,d_B^2} \Rightarrow B = -\omega_0\frac{rm\,GM_B}{\pi\,d_B^2}\times\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_g(t) = \omega_0 \frac{r_m G M_B}{\pi d_B^2}\left(1-\cos\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right) - \frac{2\pi}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\right) + \theta_0 \cos\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right)$$

EN RÉALITÉ DANS LA BALANCE DE CAVENDISH, LES CONDITIONS INITIALES

SONT :

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 = 0 & \text{(pas d'angle par rapport à l'équilibre)} \\ \dot\theta(t=0) = \dot\theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta_g(t) = \omega_0 \frac{r_m G M_B}{\pi d_B^2}\left(1-\cos\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right) - \frac{2\pi}{\omega_0}\sin\left(\frac{\omega_0}{2\pi}t\right)\right)$$

Mesurable

Mesurable

Paramètres à faire varier

FILTRAGE POSSIBLE PAR FFT (ON NE REGARDE QUE LE PREMIER PIC)

⚠ ⚠ ⚠ LA FFT INTRODUIT DES CONSTANTES !!!

ON PEUT AUSSI PRENDRE L'AMPLITUDE MOYENNE

Pour des t très grands ($\simeq$ 10 min) : θ_g se stabilise autour de la valeur moyenne (sans les cos et sans les sin