Ondes mécaniques

Milieu élastique : la perturbation d'un milieu qui se propage et des forces de rappel qui ramènent le milieu à sa position de départ (on ne dépasse pas la force élastique)

$$\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}$$

↓

IL DOIT OBLIGATOIREMENT Y AVOIR DES FORCES DE RAPPEL

Permet d'obtenir une équation de propagation → Équation de De D'Alembert (Propagation idéalisée (seule la force de rappel))
→ Propagation avec absorption d'énergie par le milieu

Propagation de l'onde ≡ déplacement de la perturbation

Régime transitoire → Régime stationnaire

Double périodicité : spatiale et temporelle

↖ identique à celle de la source

Lien entre les 2 périodicités → vitesse

milieu 1 milieu 2

→ Transmission (et réfraction si dimension > 1

Sinon il n'y a pas de réfraction)

réflexion

Superposition totale

(Stationnaire)

Entre 2 milieux

onde incidente

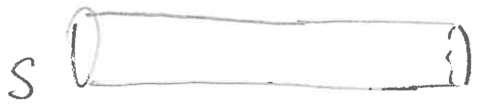
onde réfléchie

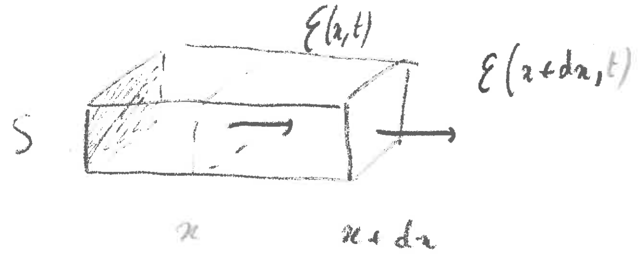
Superposition partielle

(Stationnarité partielle)

Exercice 1.

$\mathcal{E}$ correspondent au deplacement de la surface en position x !





1) $d\vec{F} = \frac{E}{l} \underbrace{\vec{dl}.\vec{dS}}_{dV} \Rightarrow \frac{F}{S} = E \frac{\partial l}{l}$

$\Rightarrow \frac{dF}{dV} = \frac{E}{l}$ avec E: Module d'Young

$f_{rappel} = \frac{E}{l}$

$\vec{F} = -k\vec{\nabla}(l)$

Pression . S

$f_{rappel} = -\vec{\nabla}\left(\frac{E}{l}\right)$

$\Delta l = l(x,t) - l(x, t-dt)$

$= \mathcal{E}(x+dx,t) - \mathcal{E}(x,t) = \frac{\delta \mathcal{E}}{\partial x} dx$

$\Rightarrow \frac{F}{S} = E \times \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \cancel{dx} \times \frac{1}{\cancel{dx}}$

$\Rightarrow F = ES \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F} = ES \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} . \vec{u_x}}$$

2) Système : {tranche d'epaisseur dx}

Principe fondamental de la Dynamique sur $\vec{e_x}$:

$$\underbrace{\rho S dx}_{\text{masse de } dx} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -F_x(x,t) + F_x(x+dx,t) = ES\left(-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(x+dx,t)\right)$$

$$= ES \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}(x,t)\, dx$$

$$\Rightarrow \rho \cancel{S}\cancel{dx} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = E\cancel{S} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}(x,t) \cancel{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \quad \text{avec } c^2 = \frac{E}{\rho}$$

Solution générale de l'équation de D'Alembert :

$$\mathcal{E}(x,t) = \underbrace{F(x-ct)}_{\text{Onde progressive suivant } \vec{e_x}} + \underbrace{G(x+ct)}_{\text{Propagation suivant } -\vec{e_x}}$$

LA RELATION DE DISPERSION PERMET D'OBTENIR À QUELLE CONDITION SUR ω ET k, L'ONDE PLANE PROGRESSIVE EST SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ONDE !!!

Si $\mathcal{E}(x,t)$ est une onde plane progressive :

$\mathcal{E}(x,t)$ est de la forme $\mathcal{E}(x,t) = A_0 \, e^{i(\omega t \mp k x + \varphi)}$

OPPH (+) (suivant $\vec{e_x}$)

OPPH (−) (suivant $-\vec{e_x}$)

Vitesse de phase $v_\varphi \overset{\wedge}{=} \frac{\omega}{k}$ par définition

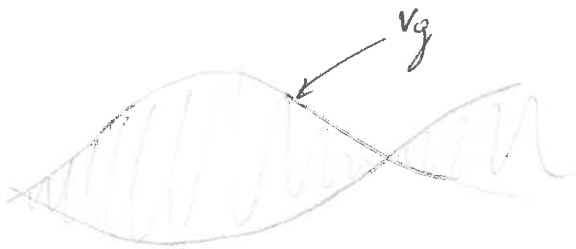
En injectant la forme d'onde plane progressive dans l'équation d'onde, la relation de dispersion est obtenue qui permet d'obtenir les conditions pour lesquelles l'onde plane progressive est solution de l'équation d'onde !

$$\underset{\text{injection}}{\longrightarrow} \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathcal{E}(x,t), \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -k^2 \mathcal{E}(x,t)$$

$$\rightarrow \left[-\omega^2 + k^2 c^2\right] \underbrace{\mathcal{E}(x,t)}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow -\omega^2 + k^2 c^2 = 0 \Rightarrow \omega = kc$ (relation de dispersion) ou $k = \frac{\omega}{c}$ donc $v_\varphi = c$

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ = vitesse de l'énergie



7) $\boxed{Z = \frac{\text{Cause}}{\text{Conséquence}} \hat{=} \frac{F}{v(x,t) \times S} = \frac{\text{Champ Vectoriel Conservatif}}{\text{Débit créé}}}$

Vitesse générale et non vitesse de phase ou vitesse de groupe

Pour l'OPPH.

$$\underline{Z} = -\frac{\underline{F}(x,t)}{\underline{v}(x,t)} = \frac{-F}{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \frac{-ES\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = -ES\frac{-ik\xi}{i\omega\xi}$$

Définition générale de la vitesse

impédance complexe

⚠ ⚠ ⚠

$$\Rightarrow \underline{Z} = ES\frac{k}{\omega} = \frac{ES}{c} = \frac{ES}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}} = \sqrt{\rho E}\, S = \rho S c$$

8) Aux bornes du barreau il y a réflexion

Superposition de l'onde incidente et réfléchie donne l'onde stationnaire

$$\xi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varphi)}$$

Posons pour les ondes stationnaires $\xi(x,t) = f(x)\,g(t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = f''(x)\,g(t) + f(x)\underbrace{\frac{\partial^2 g(t)}{\partial x^2}}_{=0}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}_{=0} g(t) + f(x)\frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow f(x)\,g''(t) - c^2 f''(x)\,g(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{f''(x)}c^2 = \frac{g(t)}{g''(t)}$$

Constante $= -\omega^2$ (Posé)

$$\frac{g''}{g} = -\omega^2 \Rightarrow g'' + \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = A'\cos(\omega t + \varphi)$$

et

$$\frac{f''}{f}c^2 = -\omega^2 \Rightarrow f'' + \underbrace{\boxed{\frac{\omega^2}{c^2}}}_{k^2} f = 0 \Rightarrow f(x) = A_2\cos(kx) + B_2\sin(kx)$$

CONDITIONS AUX LIMITES (UNIQUEMENT SUR LES x : PAS D'INFORMATIONS SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES POUR LES t)

en $x = 0$: extrémité bloquée : $\mathcal{E}(x=0,t) = 0$ (1)

en $x = L$ extrémité libre : $\vec{F}_{\text{ressort}}(x = L^+) = \vec{0}$ (1^{re} de fixe à droite)

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}(x = L^+, t) = 0 \quad (2)$$

(1) : $f(x=0) = 0 = A_2$

(2) : $f'(x) = B_2 k\cos(kx)$

$$f'(L) = B_2 k\cos(kL) = 0 \Rightarrow \cos(kL) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{kL}{p} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow k_p = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

De plus d'après la relation de dispersion $k_p^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(x,t) = g(x)f(t) = \sum A'_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \times \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}x\right)$$

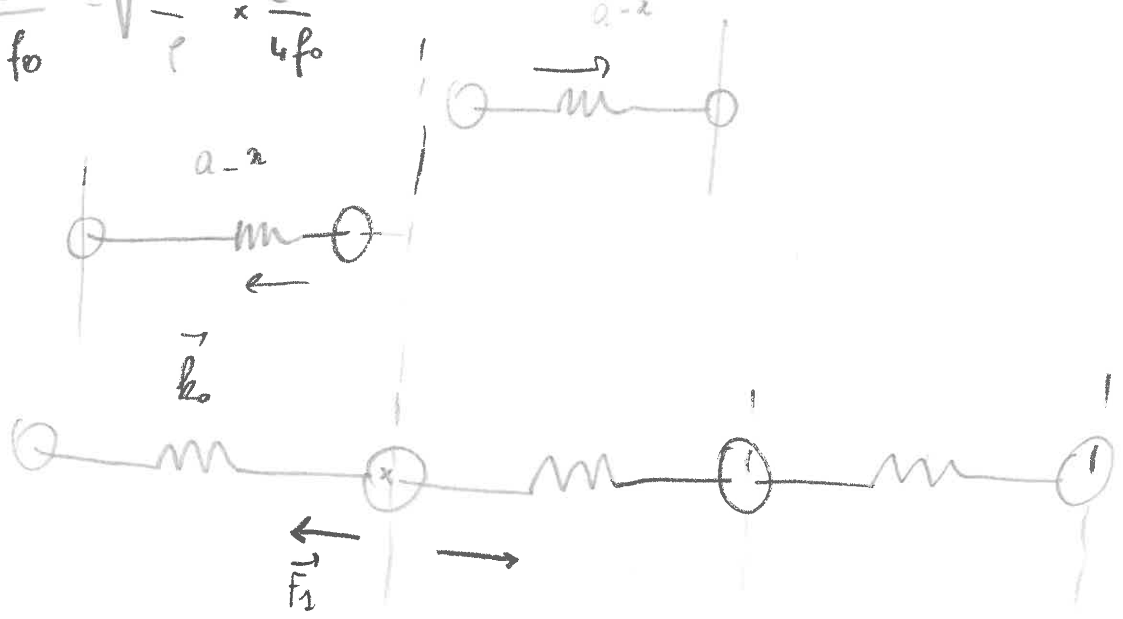
$$\text{où } \omega_n = c k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi c}{L}$$

CHAQUE VALEUR DE n CORRESPOND À UN MODE PROPRE DE VIBRATION

10) $2\pi f_0 = \dfrac{\pi c}{2L}$

$L = \dfrac{c}{4 f_0} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}} \times \dfrac{1}{4 f_0}$

Exercice 2



Système { } Référentiel galiléen

$\sum \vec{F_n} = -k_0(a - x_{n-1}) \cdot \vec{u_y} + k_0(a - x_{n+1})$

$= k_0(a - x_{n+1} - a + x_{n-1}) = k_0(x_{n-1} - x_{n+1}) = -k_0(x_{n+1} - x_{n-1})$

$\vec{\nabla}(\ell) . d\vec{\ell}$

$\sum \vec{F_n} = -k_0(\overbrace{x_n - x_{n-1}}^{\text{allongement}} - a) - k_0(\overbrace{x_{n+1} - x_n}^{\text{allongement}} - a)$

$\sum \vec{F_n} = -k_0(x_{n+1} - x_{n-1})$

1) PFD $m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -k_0(x_{n+1} - x_{n-1})$

$\Rightarrow m \dfrac{d^2 x_n}{dt^2} = -k_0(x_{n+1} - x_{n-1})$

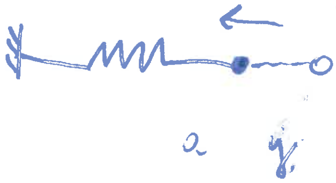
Correction :

1) Système : {masse m en position "n"}

Référentiel supposé Galiléen

Écart à la position d'équilibre y_n

Force appliquée par un ressort :

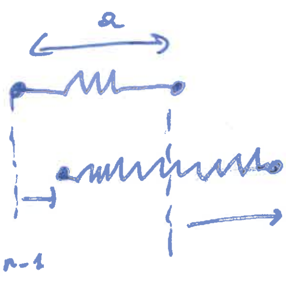


$\vec{F}_{ressort} = -k \times y$

Écart par rapport à la position d'équilibre d'après l'énoncé

$\vec{F}_{n-1\to m} : -k(y_n - y_{n-1})\,\vec{u_y}$

$\vec{F}_{n+1\to m} : -k(y_{n+1} - y_n)\,\vec{u_y}$



Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \quad \left(= \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}\right)$$

$l = a + y_n - y_{n-1}$

Sur $\vec{u_y}$: $m\ddot{y}_n(t) = -k(y_n - y_{n-1}) + k(y_{n+1} - y_n)$

$$\boxed{\Rightarrow m\ddot{y}_n(t) + 2k\,y_n(t) = k(y_{n-1} + y_{n+1})}$$

En supposant $y_n(t) = A_n e^{j(\omega t - kna)}$ et $A_n = A$ $\forall n \in \mathbb{N}$

injections →

$$\ddot{y}_n = -\omega^2 A e^{j(\omega t - kna)} = -\omega^2 y_n$$

$$y_{n-1} = A e^{j(\omega t - kna)} \times e^{jka} = y_n e^{jka}$$

$$y_{n+1} = A e^{j(\omega t - kna)} \times e^{-jka} = y_n e^{-jka}$$

$$\Rightarrow \left(-m\omega^2 + 2k_0 - k_0 e^{jka} - k_0 e^{-jka}\right) y_n(t) = 0$$

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

$$\Rightarrow m\omega^2 = 2k_0\left(1 - \cos(ka)\right)$$

$$\Rightarrow m\omega^2 = 2k_0\left(1 - \cos^2\left(\frac{ka}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow m\omega^2 = 4 k_0 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \omega(k) = 2\sqrt{\frac{k_0}{m}}\left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|}$$

$\Rightarrow$ Si $\omega(k) = 2\sqrt{\frac{k_0}{m}}\left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|$ alors $y_n(t) = A_n e^{j(\omega t - kna)}$

est solution et peut donc se propager

$\Rightarrow$ ω_{max} pour que l'onde puisse se propager et : $\omega \leqslant \underbrace{2\sqrt{\frac{k_0}{m}}}_{\omega_{max}}$

Choix d'une onde plane progressive :	c'est l'espace de fonction (base de fonctions) qui permet de décrire par combinaison linéaire toutes les autres ondes

C'est une forme d'onde proche de la Transformée de Fourier

($\Rightarrow$ changement d'espace de calcul pour la modélisation du phénomène d'ondes)

Milieu dispersif : Si $\frac{\omega}{k}$ (vitesse de phase) n'est pas constant (si la vitesse de phase varie en fonction de k)

$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{k_0}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{k_0}{m}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$ $\longrightarrow$ dépend de k : milieu dispersif

Si $ka \to 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} a \to 0$ un Développement limité de $\omega(k)$ est rendu :

$$\omega(k) \xrightarrow[\text{DL autour de } 0]{} \sqrt{\frac{k_0}{m}} \, \frac{ka}{2} + O(k)$$

$$\Rightarrow v_\varphi = \frac{\omega(k)}{k} = a\sqrt{\frac{k_0}{m}} \to v_\varphi \text{ indépendant de } k : \text{ milieu non dispersif}$$

Developpement limité

4) $\psi_n(t) \to \psi(y = na, t)$

$$\psi_{n+1}(t) \to \psi(y = (n+1)a, t) = \psi(na, t) + a\frac{\partial \psi}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + O(a^2)$$

$$\psi_{n-1}(t) \to \psi(y = (n-1)a, t) = \psi(na, t) - a\frac{\partial \psi}{\partial x}(na, t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + O(a^2)$$

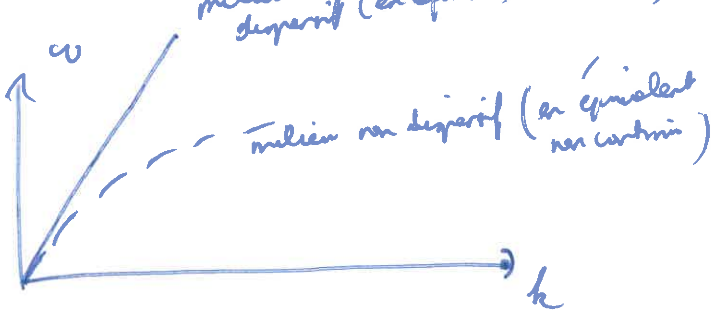
En remplaçant les termes discrets par leur équivalents continus :

$$m\ddot{y}_n(t) = -k_0(y_n - y_{n-1}) + k_0(y_{n+1} - y_n)$$

devient en continu : $$m\frac{\psi^2}{\partial t^2} = +k_0 \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) \times 2$$

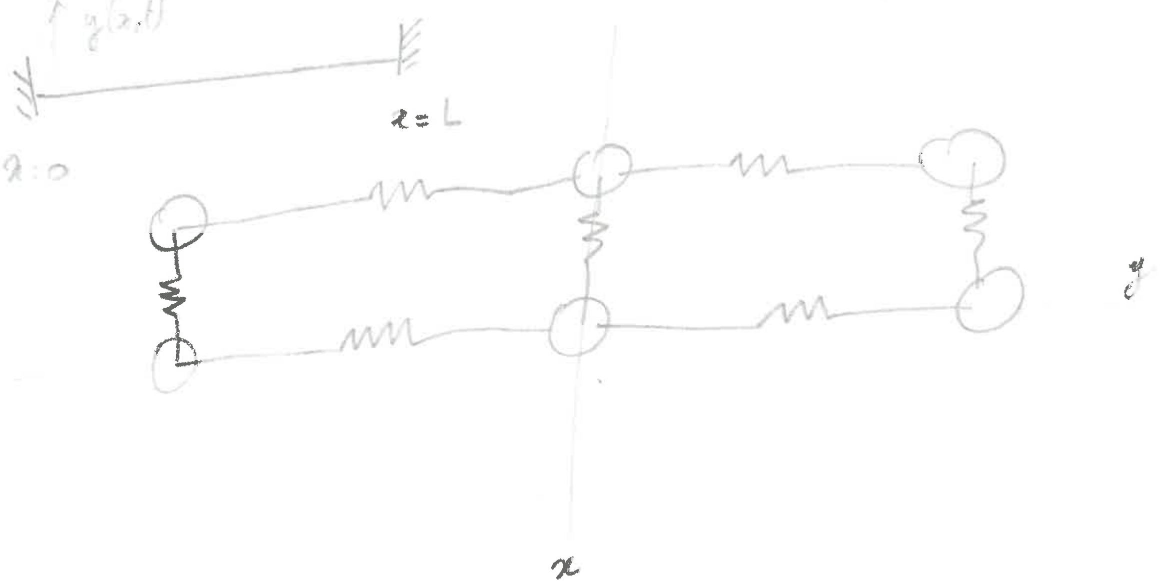
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \underbrace{\boxed{\frac{k_0 a^2}{m}}}_{= c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{équation de De D'Alembert})$$

Equation de De D'Alembert idéale : $c^2 = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k_0 a^2}{m}} \Rightarrow \omega = k \times \sqrt{\frac{k_0 a^2}{m}}$



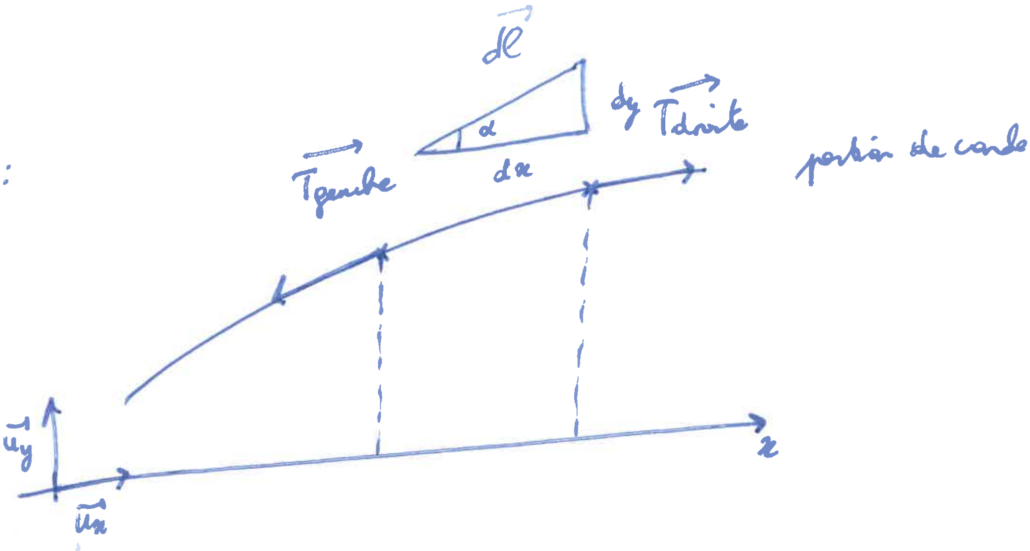
$\to$ Milieu non dispersif

Exercice 3 :



1)

Correction :



Système : { élément de corde entre x et $x+dx$ }

Référentiel Terrestre supposé Galiléen

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$\mu \cdot \vec{dl} \times \vec{a} = \vec{T_g}(x,t) + \vec{T_d}(x+dx,t)$$

⚠ $dl^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow dl = \sqrt{dx+dy} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$\frac{dy}{dx}(x,t) = \tan\alpha(x,t)$ et $|\alpha(x,t)| \leq 1|$ (FAIBLES PERTURBATIONS VERTICALES)

⚠ $\Rightarrow dl \simeq dx$

Projection sur $\vec{u_x}$ et $\vec{u_y}$

Pas d'accélération sur x — Ce ne sont pas les mêmes angle α !!!

$$\begin{cases} \text{Sur } \vec{u_x} : \rho dx \times 0 = -T(x,t)\cos(\alpha(x,t)) + T(x+dx,t)\cos(\alpha(x+dx,t)) \\ \text{Sur } \vec{u_y} : \rho dx \times \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x,t)\sin(\alpha(x,t)) + T(x+dx,t)\sin(\alpha(x+dx,t)) \end{cases}$$

Pour des faibles perturbations, $\alpha \to 0$

> ⚠ DANS LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS, IL FAUT S'ARRÊTER AU PREMIER TERME QUI PERMETTE D'OBTENIR DES CALCULS NON NULS PAR INJECTION DU DÉVELOPPEMENT LIMITÉ DANS LES CALCULS

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{u_x} : 0 = -T(x,t)\times 1 + T(x+dx,t)\times 1 \Rightarrow T(x,t) = T(x+dx,t) \hat{=} T_0 \\ \text{sur } \vec{u_y} : \rho dx \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = +T_0 \Big(\underbrace{\sin(\alpha(x+dx,t))}_{\alpha(x+dx,t)} - \underbrace{\sin(\alpha(x,t))}_{\alpha(x,t)} \Big) \end{cases}$$

$$= T_0 \frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} dx$$

⚠ Il ne faut pas prendre les mêmes α sinon cela donne un résultat nul

$$\Rightarrow \rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)\, dx \quad \left(\text{car } \alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{avec } c \hat{=} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

2) $y(x,t) = f(x)g(t) = \cos(\omega t + \varphi)(A \sin kx + B \cos kx)$

$\hookrightarrow$ Complexe $A e^{i(\omega t - kx)}$ $A e^{i\omega t} \times e^{-ikx}$

Réel : $f(t) \times g(x)$

$Re[A e^{i\omega t}] Re[e^{-ikx}]$

CONDITIONS INITIALES

$$\begin{cases} y(x=0,t) = 0 \\ y(x=L,t) = 0 \end{cases}$$

fixé en 0 (1) $\Rightarrow B = 0$ (1)

fixé en L (2) $\Rightarrow A \sin kL = 0$ (2) $\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow y(x,t) = A \cos(\omega_n t + \varphi) \sin(k_n x) = \frac{A}{2}\left(\sin(\omega_n t + \varphi + k_n x) + \sin(\omega t - k_n x + \varphi)\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(\sin\left(\omega\left(t + \frac{k_n}{\omega_n}\right) + \varphi\right) + \sin\left(-k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) + \varphi\right)\right)$$

OPPH $\ominus$? OPPH $\oplus$

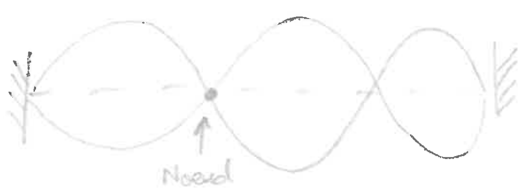
3) D'après la condition de quantification (à recalculer pour chaque conditions aux limites)

ici : $k_n = \frac{n\pi}{L}$ $(n \in \mathbb{Z})$ $= \frac{2\pi}{\lambda_n}$

$$\boxed{\Rightarrow \lambda_n \times n = 2L}$$

(toujours valable pour une corde)

$n = 1$



$n = 3$

Exercice n° 5 :

1) Cf exercice précédent

$y(x,t) = f(x)g(t) = 0$ si $f(x)=0$ ou $g(t)=0$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

2) Onde stationnaire : $y(x,t) = f(x)g(t) = \cos(\omega t + \varphi)(A \sin kx + B \cos kx)$

Conditions aux limites :
$$\begin{cases} y(x=0,t) = a\cos(\omega t) \text{ attaché au vibreur} , & B = a \\ y(x=L,t) = 0 \text{ fixé en } L \Rightarrow A\sin(kL) + B\cos kL = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A\sin(kL) + a\cos kL = 0$

$\Leftrightarrow A = -a \dfrac{\cos kL}{\sin kL}$

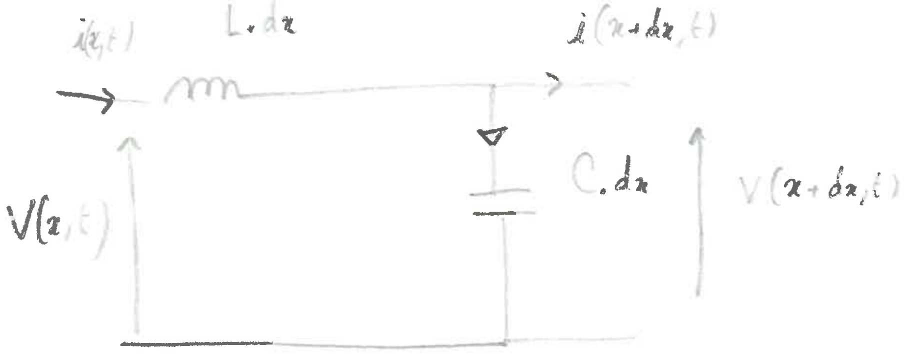
$$\Rightarrow y(x,t) = a\cos(\omega t)\left(\cos(kx) - \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)}\sin(kx)\right) = \underbrace{\frac{a\cos(\omega t)}{\sin(kL)}}_{g(t)} \underbrace{\sin(kL - kx)}_{f(x)}$$

Si $\omega = n\dfrac{\pi c}{L} \Rightarrow k = \dfrac{\omega}{c} = n\dfrac{\pi}{L} \Rightarrow \sin(kL) \longrightarrow 0 \Rightarrow y(x,t) \longrightarrow +\infty$

Donc

- résonance lorsque la fréquence du vibreur correspond à un mode propre de la corde
- modélisation fausse $\longrightarrow$ dans la réalité il y a les frottements qui viennent diminuer l'amplitude !

Exercice 6.



$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial CV}{dt} = C\frac{dV}{dt}$

$U_L = L\frac{di}{dt}$

Loi des noeuds:

$\Rightarrow i(x,t) - i(x+dx,t) = C dx \frac{dV(x+dx,t)}{dt}$

Loi des mailles :

$V(x,t) = L dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + V(x+dx,t)$ Développement limité

$\Rightarrow -\frac{\partial i}{\partial x} = C dx \frac{\partial V}{\partial t}(x+dx,t) = C\frac{\partial V}{\partial t}$

et

$V(x,t) - V(x+dx,t) = L dx \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial i}{\partial t} = C\frac{\partial V}{?} \\ -\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} \end{cases} \longrightarrow -\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = C\frac{\partial V}{\partial x \partial t} = -CL\frac{\partial^2 i}{?}$