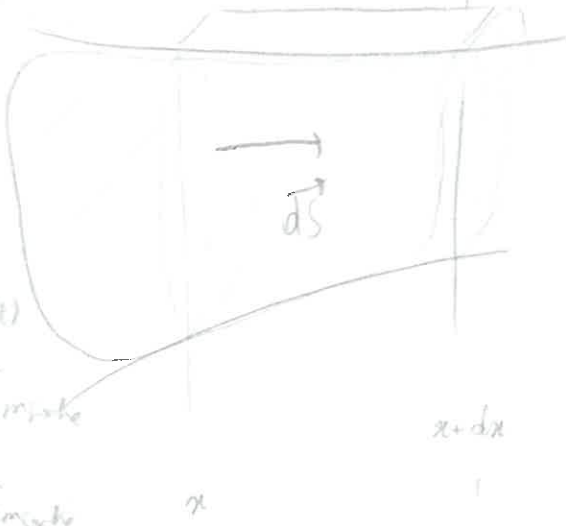
Volume élémentaire

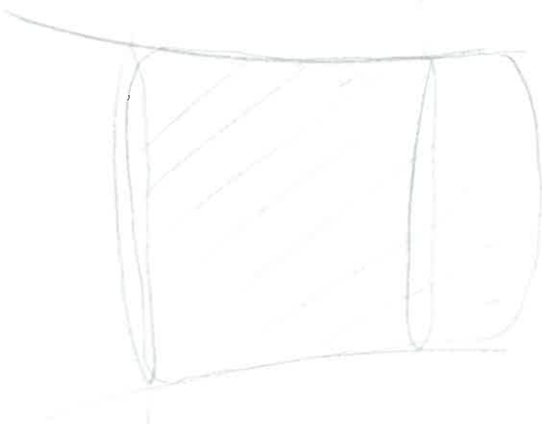


$$m_{totale}(t) = m_{\Sigma}(t) + \delta m_{entrée}$$

$$m_{totale}(t+dt) = m_{\Sigma}(t+dt) + \delta m_{sortie}$$

$$\Rightarrow m_{totale}(t+dt) - m_{totale}(t) = m_{\Sigma}(t+dt) - m_{\Sigma}(t) + \delta m_{entrée} - \delta m_{sortie}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{totale}}{\partial t} dt = \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial t} dt + \delta m_{entrée} - \delta m_{sortie}$$



$$\Rightarrow \frac{\partial m_{totale}}{\partial t} = \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial t} + \frac{\delta m_{entrée}}{dt} - \frac{\delta m_{sortie}}{dt}$$

$\|$

0 (pas de terme source ou puit de masse)

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial t} = \frac{\delta m_{sortie}}{dt} - \frac{\delta m_{entrée}}{\partial t}$$

ρ (pour un fluide incompressible)

$\|$

$\rho^{(x,t)}$ $\quad D_{volumique}$

Le Débit volumique de masse est défini par $D_m = \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dV}\frac{dV}{dt}$

$$= \frac{dm}{dV}\left(\frac{dS\,dx}{dt}\right)^{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial t} = \rho\left(D_{V}|_{sortie} - D_{V}|_{entrée}\right) = \rho\left(dS_{sortie} v_{sortie} - dS_{entrée} v_{entrée}\right) = \rho\, dS\, v$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{\Sigma}}{\partial t} = \rho\left(dS_{sortie} v_{sortie} - dS_{entrée} v_{entrée}\right)$$

⚠ ⚠ ⚠ L'INTRODUCTION DU DÉBIT ET DE LA VITESSE INTRODUIT DES TERMES MICROSCOPIQUES

Même raisonnement sur la quantité de mouvement

$$m_{total}(t)\,v(t) = m_\Sigma(t)v(t) + \delta p_{entrée}(t)$$

$$m_{total}(t+dt)\,v(t+dt) = m_\Sigma(t)\,v(t) + \delta p_{sortie}(t)$$

EN SUPPOSANT UN SYSTÈME FERMÉ $m_\Sigma(t+dt) = m_\Sigma(t)$ AVEC

CONSERVATION DE LA MASSE (PAS DE MASSE CRÉÉE OU PERDUE

= PAS DE RÉACTIONS NUCLÉAIRES OU RÉACTIONS CHIMIQUES)

$m_{total}(t+dt) = m_{total}(t)$

$$\overbrace{m_\Sigma(x,t)}^{p_{entrée}}\ \overbrace{v_\Sigma(x,t)}^{v_{entrée}}$$

$$\overbrace{m_\Sigma(x+dx^+,t+dt)}^{m_{sortie}}\ \overbrace{v_\Sigma(x+dx^+,t+dt)}^{v_{sortie}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{total}\, v(t) = m_\Sigma\, v(t) + \delta p_{entrée}(t) \\ m_{total}\, v(t+dt) = m_\Sigma\, v(t+dt) + \delta p_{sortie}(t) \end{cases}$$

A LA PLACE PARTIR DU SYSTÈME

$$\begin{cases} \vec{p}_{TOTAL}(t) = \vec{p}_\Sigma(t) + \delta\vec{p}_{entrée}(t) \\ \vec{p}_{TOTAL}(t+dt) = \vec{p}_\Sigma(t+dt) + \delta\vec{p}_{sortie}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{p}_{total}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial \vec{p}_\Sigma}{\partial t}}_{=\sum \vec{F}_{ext}} + \frac{\delta \vec{p}_{entrée}}{\partial t} - \frac{\delta \vec{p}_{sortie}}{\partial t}$$

⚠ ⚠ ⚠ LE PASSAGE AU DÉBIT OU AU VITESSE EST MICROSCOPIQUE ET NON MACROSCOPIQUE SI LE SYSTÈME EST dV ET NON V LA CONFUSION ENTRE MICROSCOPIQUE ET MACROSCOPIQUE APPARAIT

$$\Rightarrow \frac{\partial p_\Sigma(t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{p}_{TOTAL}}{\partial t} + \frac{\delta p_{sortie}}{\partial t} - \frac{\delta p_{entrée}}{\partial t}$$

Σ

(Terme source pour la quantité de mouvement

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \frac{\partial \vec{p}_{TOTAL}}{\partial t} + \underbrace{(\rho_{sortie}\, \vec{v}_{sortie})\, d\vec{S}_{sortie}\cdot\vec{v}_{sortie}}_{D\,\text{quantité de mouvement}|_{sortie}} - \underbrace{(\rho_{entrée}\cdot\vec{v}_{entrée})\, d\vec{S}_{entrée}\cdot\vec{v}_{entrée}}_{D\,\text{quantité de mouvement}|_{entrée}}$$

Bilan en énergie : (UTILISATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE (ÉNERGIE PLUS GÉNÉRALE))

$$E_{M_{TOTAL}}(t) = E_{M_\Sigma}(t) + \delta E_{M\,entrée}$$

$$E_{M_{TOTAL}}(t+dt) = E_{M_\Sigma}(t+dt) + \delta E_{M\,sortie}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_{M_{TOTAL}}(t)}{\partial t} = \frac{\partial E_{M_\Sigma}(t+dt)}{\partial t} + \frac{\delta E_{M\,sortie}}{dt} - \frac{\delta E_{M\,entrée}}{dt}$$

||

TERME SOURCE

(SOURCE OU PUITS D'ÉNERGIE)

NÉCESSITÉ L'INTRODUCTION DE TERMES MICROSCOPIQUES

Expression avec les débits d'énergie (volumiques)

$$e_m|_{entrée}\, D_V|_{entrée} - e_m|_{sortie}\, D_{V\,sortie}$$

||

$$E_M = \iiint e_m\, dV$$

ou

expression avec les vitesses

$$e_m|_{entrée} \cdot dS_{entrée} \cdot v_{entrée} - e_m|_{sortie} \cdot dS_{sortie} \cdot v_{sortie}$$

⚠ ⚠ ⚠ IL EST TRÈS FACILE DE MÉLANGER MICROSCOPIQUE ET MACROSCOPIQUE DANS LES ÉQUATIONS BILANS CAR :

- LE SYSTÈME CONSIDÉRÉ PEUT ÊTRE $V = S \times \Delta x$

OU $dV = \vec{dS} \cdot dx \cdot \vec{e_x}$

$\vec{dS}$

$dx \cdot \vec{e_x}$

S

$dx \cdot \vec{e_x}$

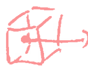
- LE PASSAGE AU DÉBIT ET AU VITESSE REQUIERT L'INTRODUCTION DE VARIABLES MICROSCOPIQUES

A PRÉFÉRER

Développement le plus rigoureux

Système $= \{dV\}$ TOUT EST MICROSCOPIQUE

dV



$\vec{dS}$

$dx \cdot \vec{e_x}$

$$\rho_{TOTAL}(t) = \rho_\Sigma(t) + \delta\rho_{entrée}$$

$$\rho_{TOTAL}(t+dt) = \rho_\Sigma(t+dt) + \delta\rho_{sortie}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_{TOTAL}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_\Sigma(t)}{\partial t} + \frac{\delta\rho_{entrée}}{\partial t} - \frac{\delta\rho_{sortie}}{\partial t}$$

TERME SOURCE OU PUIT

$$D_\rho = \frac{\partial \rho}{\partial V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{D_V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \vec{dS} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\vec{v}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_{TOTAL}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_\Sigma(t)}{\partial t} + \rho\left(D_{V_{entrée}} - D_{V_{sortie}}\right)$$

$$= \frac{\partial \rho_\Sigma(t)}{\partial t} + \rho\left(\vec{dS}_{entrée} \cdot \vec{v}_{entrée} - \vec{dS}_{sortie} \cdot \vec{v}_{sortie}\right)$$

Non rigoureux mais généralement fait en prépa

Système $= \{S\,dx\}$

SYSTÈME HYBRIDE (MACROSCOPIQUE ET MICROSCOPIQUE)

S

$dx \cdot \vec{e_x}$

$$m_{TOTAL}(t) = m_\Sigma(t) + \delta m_{entrée}$$

$$m_{TOTAL}(t+dt) = m_\Sigma(t+dt) + \delta m_{sortie}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{TOTAL}(t)}{\partial t} = \frac{\partial m_\Sigma(t)}{\partial t} + \frac{\delta m_{entrée}}{\partial t} - \frac{\partial m_{[illegible]}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{TOTAL}(t)}{\partial t} = \frac{\partial m_\Sigma(t)}{\partial t} + \rho\left(D_{V_{entrée}} - D_{V_{sortie}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_{TOTAL}(t)}{\partial t} = \frac{\partial m_\Sigma(t)}{\partial t} + \rho\left(S_{entrée}\, v_{entrée} - S_{sortie}\, v_{sortie}\right)$$