

Regime forcé avec onde de Melde :

On part de l'équation de la onde de Melde :
 $c^2 = \frac{T}{\mu}$ $\rightarrow$ tension du fil = poids si poids
 μ = masse linéique de la onde de Melde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Compliqué car on n'a aussi la variable x

$\Rightarrow$ Il est préférable de partir sur un système oscillant à une seule variable (de type non
 oscillatoire) $\Rightarrow$ cela contraint spatialement le système donc empêche le système de
 libérer son énergie de proche en proche donc permet la

résonance

$\Rightarrow$ UNE ONDE NE PERMET PAS LA RÉSONANCE À MOINS
 QU'ELLE SOIT STATIONNAIRE !!!

Résonner dans dans la les hypothèses d'un système oscillant à 1 dimension (et
 non sur une onde qui est à 2 dimension mais qui peut être réduite à 1 dimension
 par stationnarité !!!)

$$y'' + \zeta y' + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{système oscillant amorti}$$

Équation caractéristique associée : $r^2 + \zeta r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \left(j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \right)$$

> 0 : système apasmodique
 $= 0$: système critique
 < 0 pseudo-pasmodique

$$r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm \frac{j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}}{2Q}$$

$$= -\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right) \pm \left(j\omega_0 \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}\right) \omega$$

$$y = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

Pour annuler l'amortissement, on peut alors forcer le système par un paramètre externe

$$\ddot{y} + \underbrace{\xi \dot{y}}_{\text{déjà obtenu}} + \omega_0^2 y = a \cos(\omega_g t) = a \operatorname{Re}[e^{i\omega_g t}]$$

$$y_g = y_h + y_p \quad \text{ON cherche une solution de type } \underline{A} e^{i\omega_g t} \neq a!!!$$

détermination de y_p :

$$\dot{y}_p = i\omega_g y_p$$

$$\ddot{y}_p = -\omega_g^2 y_p$$

En injectant ces solutions dans l'équation différentielle:

$$(-\omega_g^2 + i\omega_g + \omega_0^2) \underline{A} e^{i\omega_g t} = a e^{i\omega_g t}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega_g^2) - i\omega_g}$$

$$\Rightarrow |\underline{A}| = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}$$

$$\varphi_A = ? \quad \tan(\varphi_A) = \frac{\omega_g}{\omega_0^2 - \omega_g^2}$$

$$\Rightarrow y_p = \operatorname{Re}[\underline{A} e^{i\omega_g t}] = |\underline{A}| \cos(\omega_g t + \varphi_A) = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} \cos(\omega_g t + \varphi_A)$$

$$y_g = A_0 e^{-\omega_0/2Q t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + \omega_g^2}} \cos(\omega_g t + \varphi_A)$$

Difficile de conclure, pas très élégant comme démonstration?

$\Rightarrow$ A LA PLACE PASSER PAR LES TRANSFORMÉES DE FOURIER?

$$y'' + \xi y' + \omega_0^2 y = a \cos(\omega_g t) = a \operatorname{Re}(e^{j\omega_g t})$$

ω_0 et ω_g sont différents

$$y' \xrightarrow{TF} j\omega Y(f)$$

encore un autre ω !!! (ω autre ω autre!!!)

$$= \omega^2 Y(f) + j\omega Y(f) + \omega_0^2 Y(f) = a \delta(f - f_g)$$

$$= \omega^2 Y(f) + j \frac{\omega_0}{2Q} \omega Y(f) + \omega_0^2 Y(f) = a \delta(f - f_g)$$

1) Etude de la réponse impulsionnelle (réponse libre du système)

$$= \omega^2 Y(f) + j \xi \omega Y(f) + \omega_0^2 Y(f) = \delta(f)$$

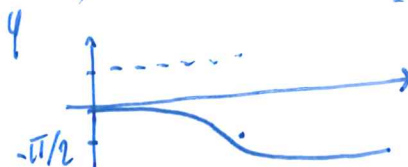
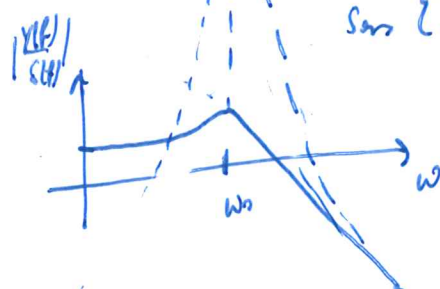
$$\frac{Y(f)}{\delta(f)} = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \xi \omega}$$

$$\omega \rightarrow 0: \left| \frac{Y(f)}{\delta(f)} \right| \rightarrow \frac{1}{\omega_0}$$

$$\omega \rightarrow +\infty: \left| \frac{Y(f)}{\delta(f)} \right| \rightarrow -\infty$$

$$\omega = \omega_0: \left| \frac{Y(f)}{\delta(f)} \right| = \left| \frac{\omega_0^2}{j \xi \omega_0} \right| = \left| j \frac{\omega_0}{\xi} \right| = \left| j \frac{\omega_0}{\omega_0/2Q} \right| = |j 2Q|$$

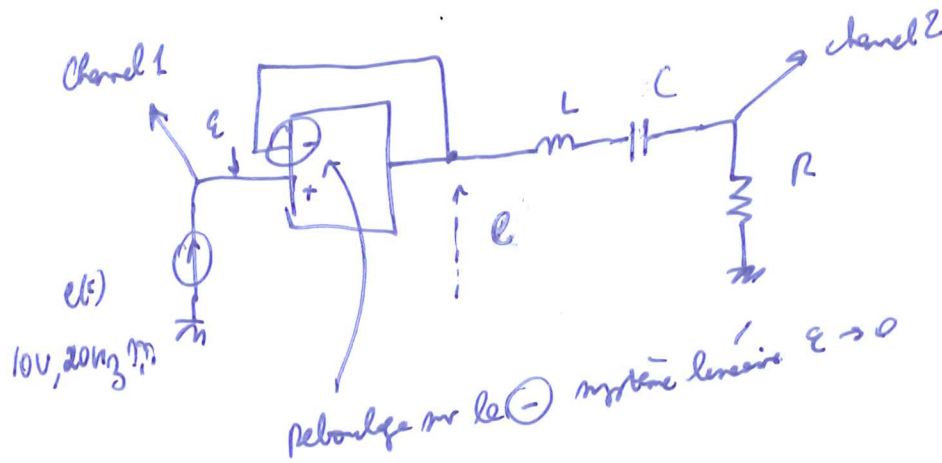
$$\text{Sans } \xi: \frac{Y(f)}{\delta(f)} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Système passe-bande

$$Y(f) = a \delta(f - f_g) \times H(f)$$

Manip: Montage RLC forcé



Verron plus stable s'il y a le temps : RLC à résistance négative

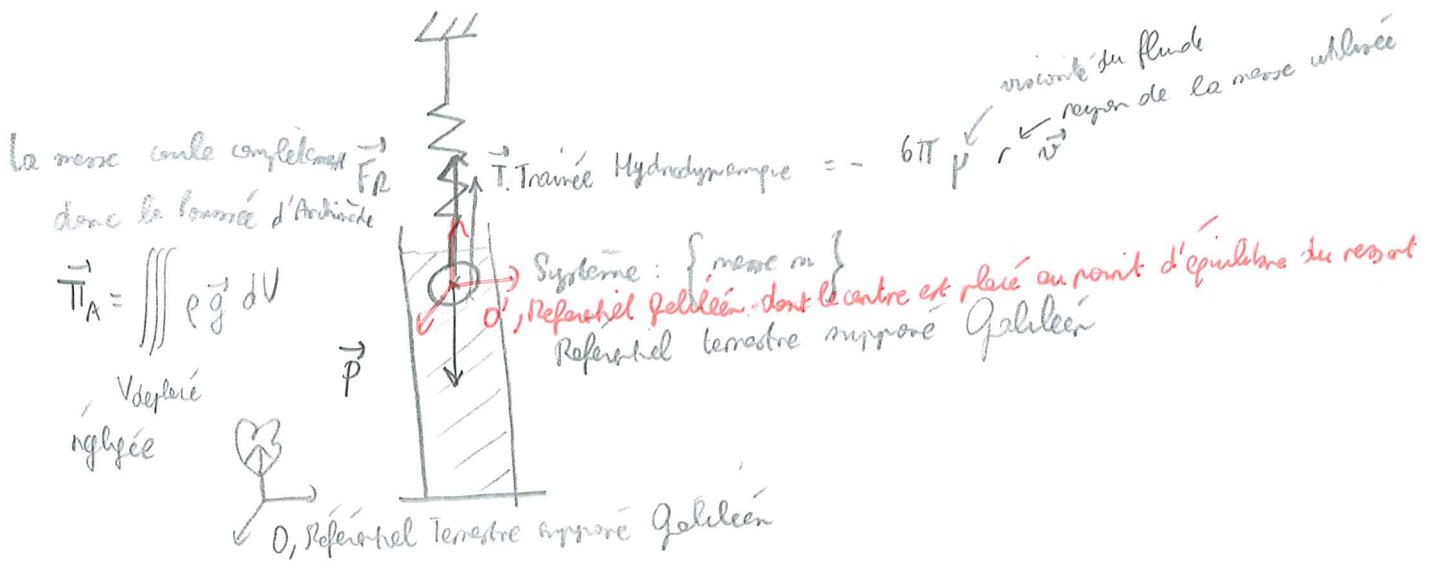
Leçon 48 : Phénomènes de résonance dans les différents domaines de la physique

1) Définition de la résonance

[YouTube.com (Université de Namur) / TP de Physique 8 : la résonance (1: le pendule électrique)]

La résonance correspond à un transfert maximum d'énergie entre 2 systèmes oscillants et couplés. L'oscillateur actif qui impose une excitation périodique et entretenue est appelé l'excitateur. L'oscillateur passif qui subit cette oscillation à cause de la présence de l'excitateur est appelé le résonateur. Lorsque la fréquence de l'excitateur est égale à la fréquence propre du résonateur, le transfert d'énergie est maximum et cela se traduit par une amplitude maximum de vibration du résonateur.

Supposons un oscillateur harmonique avec atténuation tel que :



2nd loi de Newton

$$\vec{F}_R + \vec{T} + \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \vec{a}$$

$$-k(\vec{l} - \vec{l}_0) - 6\pi p r \vec{v} + m\vec{g} = m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$$

Projection sur $\vec{e}_y$

$$-k(y - y_{eq})\vec{e}_y - mg\vec{e}_y - 6\pi p r \dot{y}\vec{e}_y = m \ddot{y}\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y + \frac{6\pi p r}{m}\dot{y} = -g$$

$$\underbrace{\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y} + \omega_0^2 y = g}_{\text{Oscillateur passif}} \quad \text{Excitation (réponse forcée)}$$

Equation différentielle d'ordre 2 avec second membre

1) Résolution de l'équation homogène :

$$\ddot{y}_H(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y}_H(t) + \omega_0^2 y_H(t) = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q} - 2 \right) \left(\frac{1}{Q} + 2 \right) < 0$$

$$y_H(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A e^{\omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}t} + B e^{-\omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}t} \right)$$

c'est le régime pseudo-périodique qui nous intéresse

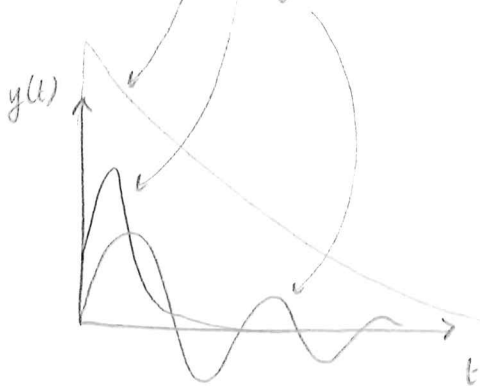
Régime apériodique: $\Delta > 0$

Régime critique: $\Delta = 0$

Régime pseudo-périodique: $\Delta < 0$

$$y_H(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (At + B)$$

$$y_H(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos\left(\omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}t\right) + B \sin\left(\omega_0 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}t\right) \right)$$



2) Obtention de la solution particulière

$$g \text{ est une constante} \Rightarrow y_p(t) = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_p(t) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_p(t) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 y_p(t) = g$$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{g}{\omega_0^2}$$

3) Solution générale = solution homogène + solution particulière

$$y_g(t) = y_H(t) + y_p(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left(A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t) \right) + \frac{g}{\omega_0^2}$$

Passage aux énergies : (par intégrale première du mouvement).

$$x \ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} \dot{y} + \frac{\omega_0}{Q} (\dot{y})^2 + \omega_0^2 y \dot{y} = 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{y}^2 \right) + \frac{\omega_0}{Q} (\dot{y})^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0^2}{2} y^2 \right) = 0$$

P_{inductif}

$P_{\text{dissipée}}$

$P_{\text{potentielle}}$

(non intégrable

(donc énergie non calculable) sans

connaître le

profil de la réponse

en fonction du temps

A NE PAS DÉVELOPPER AVEC ω_0 ET Q

MAIS UNIQUEMENT AVEC LES PARAMÈTRES PHYSIQUES

D'UN SYSTÈME SINCE LES ÉNERGIES N'ONT PAS DE SENS PHYSIQUES

$$\ddot{y} + \frac{6 \pi \mu r}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$x \ddot{y} + \frac{6 \pi \mu r}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} \dot{y} + \frac{6 \pi \mu r}{m} (\dot{y})^2 + \frac{k}{m} y \dot{y} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(m \dot{y}^2 \right) + \frac{6 \pi \mu r}{m} (\dot{y})^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k y^2 \right) = 0$$

Puissance liée à l'énergie inductif

Puissance dissipée (non calculable sans le profil de la réponse)

Puissance liée à l'énergie potentielle d'un ressort

Détermination des constantes à l'aide des conditions initiales

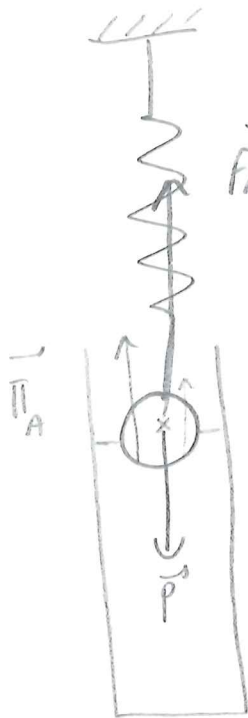
$$\begin{cases} y_g(0) = -y_{max} \\ \dot{y}_g(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A + \frac{g}{\omega_0^2} = -y_{max} \Rightarrow A = -y_{max} - \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega_1 B + \frac{g}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow B = -\frac{g}{\omega_0^2 \omega_1}$$

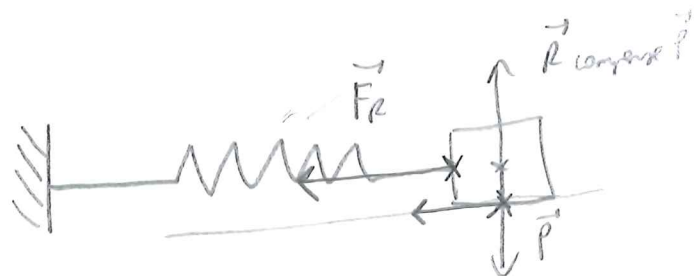


POUR EVITER D'AVOIR UN SECOND MEMBRE, IL EST PRÉFÉRABLE D'AVOIR UN SYSTÈME OÙ LA POUSSÉE D'AMORTISSEUR COMPENSE LE POIDS, C'EST-À-DIRE UN OBJET QUI FLÔTE



$\vec{F}_v$ (frottements visqueux : utilisés comme amortisseur)
A l'équilibre $\vec{T}_A$ compense $\vec{P}$

AUTRE SYSTÈME POSSIBLE :

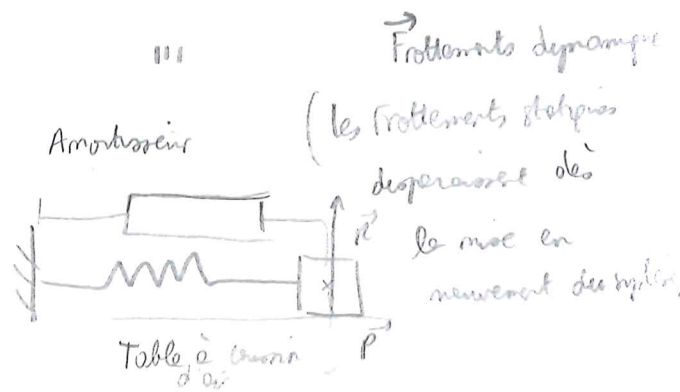


2nd loi de Newton :

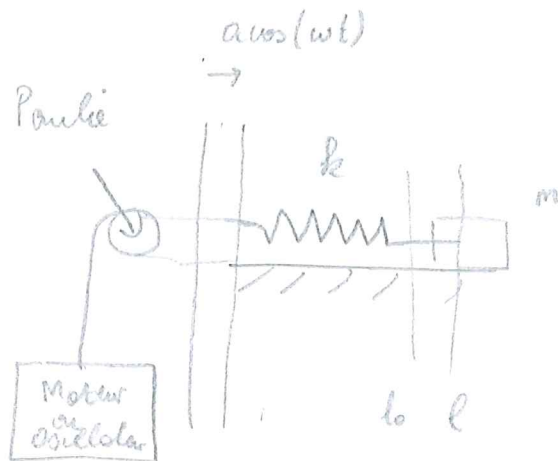
$$\vec{F}_R + \vec{F}_v + \vec{T}_A + \vec{P} = m \vec{a}$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{6\pi\eta r}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} = 0$$



Régime forcé:



0 (en prenant une origine du référentiel galiléen dont le centre est le point d'équilibre de la masse à t=0)

$$m \ddot{y} = -k(y - y_{eq} - a \cos(wt)) - \alpha \dot{y}$$

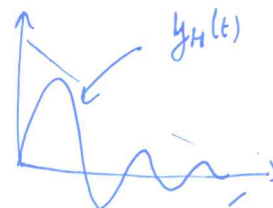
$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{k}{m} a \cos(wt)$$

Résonance

Oscillateur (réponse forcée)

Equation différentielle d'ordre 2 avec second membre

$$y_p(t) = y_h(t) + y_{fp}(t)$$



REMARQUE IMPORTANTE : AU BOUT D'UN CERTAIN TEMPS, LA RÉPONSE LIBRE S'ANNULE ET CE NE SERA QUE LA RÉPONSE FORCÉE QUE L'ON OBSERVERA

Détermination de la solution particulière :

- $y_p(t) = a_1 \cos(wt) + b_1 \sin(wt)$, calculs longs !!!

- Méthode de l'exponentielle complexe

ou $y_p(t) = A \cos(wt + \varphi)$ [YouTube (Ferre - la physique expliquée)]
L'oscillateur -
résistance
d'élongation]

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{k a}{m} \cos(\omega t) = \frac{k a}{m} \operatorname{Re}[e^{i \omega t}]$$

Equation complexe associée : $\underline{y} = y + i z$ (on peut prendre $\underline{z} = z + i y$ si le ressort est étudié sur l'axe $\vec{e}_x$)

$$\underline{\ddot{y}} + \frac{\alpha}{m} \underline{\dot{y}} + \frac{k}{m} \underline{y} = \frac{k a}{m} e^{i \omega t}$$

Dans le cas général $\omega \neq \omega_0$ (on va donc s'intéresser aux solutions de la forme $y_p(t) = A e^{i \omega t}$)

$$\Rightarrow \underline{\dot{y}}_p(t) = i \omega \underline{y}_p(t)$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{y}}_p(t) = -\omega^2 \underline{y}_p(t)$$

En injectant ces relations dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\left(-\omega^2 + i \omega \frac{\alpha}{m} + \frac{k}{m} \right) \underline{A} e^{i \omega t} = \omega_0^2 a e^{i \omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{\omega_0^2 a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \omega \frac{\alpha}{m}}$$

Rappels mathématiques :

$$\underline{A} e^{i \omega t} = |\underline{A}| e^{i(\omega t + \varphi_A)}$$

Passez à la partie réelle :

$$\operatorname{Re}[\underline{A} e^{i \omega t}] = \operatorname{Re}[|\underline{A}| e^{i(\omega t + \varphi_A)}] = |\underline{A}| \cos(\omega t + \varphi_A)$$

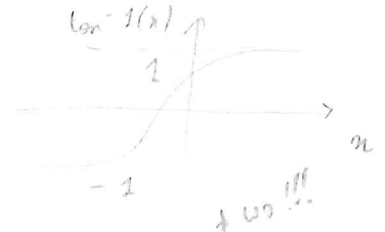
$$\text{Amplitude de } \underline{A} : |\underline{A}| = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\alpha}{m}\right)^2}}$$

$$\text{Phase de } \underline{A} : \tan(\varphi_A) = \frac{-\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega^2 - \omega_0^2} \Rightarrow \varphi_A = \tan^{-1} \left(\frac{\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)$$

$$\varphi_A \in]-\pi/2, \pi/2[$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p &= \operatorname{Re}[\underline{A} e^{i \omega t}] = |\underline{A}| \cos(\omega t + \varphi_A) \\ &= \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\alpha}{m}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi_A) \end{aligned}$$

$$\text{et } y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\alpha}{m}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi_A)$$



Etude de $|A| = f(\omega)$

$$|A| = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\alpha}{m}\right)^2}}$$

le dénominateur s'annule si $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\alpha}{m}\right)^2 = 0$

$$\Rightarrow \omega_0^4 + \omega^4 + 2\omega_0\omega + \omega^2 \frac{\alpha^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right) + 2\omega\omega_0 + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + \frac{2\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \omega + \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= \frac{4\omega_0^2}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2} - \frac{4\omega_0^2}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} =$$

$$4\omega_0^2 \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2} - \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \right)$$

$$= 4\omega_0^2 \left(\frac{1 - \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2} \right)$$

$$\frac{4\omega_0^2 - \frac{4\omega_0^2}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}}}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2} < 0$$

$$\omega_1 = \frac{-\frac{2\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} - i \frac{2\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \frac{\alpha}{m}}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{-\frac{2\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} + i \frac{2\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \frac{\alpha}{m}}{2}$$

$$= \frac{\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \left(-1 - i \frac{\alpha}{m} \right)$$

$$= \frac{\omega_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \left(-1 + i \frac{\alpha}{m} \right)$$

NE PEUT PAS DE CONCLURE !!!

Autre méthode :

$$|A| = \frac{\omega_0^2 a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\omega \frac{\alpha}{m}\right)^2}}$$

$$= \frac{\omega_0^2 a}{\omega \frac{\alpha}{m} \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \frac{\alpha}{m}}\right)^2 + 1}}$$

Le système résonne en $|A| \rightarrow +\infty \Rightarrow$ dénominateur de $|A|$ tend vers 0

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega \frac{\alpha}{m}} \right)^2 = -1$$

Ne permet pas de conclure !!!

Solution 1 : Développement limité pour enlever de la racine carrée

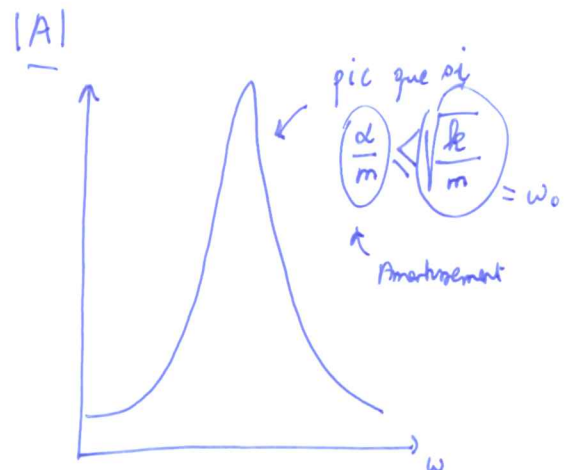
$\Rightarrow$ limite l'étude à ω proche de ω_0

$$|A| = \frac{\frac{\omega_0^2 \alpha}{\omega \frac{\alpha}{m}}}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \frac{\alpha}{m}} \right)^2 + 1}}$$

pas possible car il ne s'agit pas simplement de $\sqrt{x^2 + 1}$

Solution 2 : [Youtube (FERITO - la physique expliquée) / L'oscillateur - résonance d'élongation]

Tracer la fonction : $|A| = f(\omega)$



IL NE FAUT PAS TROUVER ω POUR QUE

LE DÉNOMINATEUR S'ANNULE MAIS ω

POUR QUE LE DÉNOMINATEUR SOIT

MINIMAL CAR $|A|$ NE DIVERGE PAS !!!

(ET EN PLUS LA SOLUTION PARTICULIÈRE A ÉTÉ OBTENUE LORSQUE ω

N'EST PAS RACINE DE LA EQUATION HOMOGÈNE $\equiv \omega \neq \omega_{\text{résonance}}$

S'IL Y A CE MODÈLE N'EST PAS VARIABLE !!!)

HYPOTHÈSE FORCE...

car $\sqrt{\quad}$ est une fonction monotone

$$\min \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} \omega \right)^2} \right) = \min \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} \omega \right)^2 \right) = \frac{d}{d\omega} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} \omega \right)^2 \right) = 0$$

$$= \frac{d}{d\omega} \left(\omega_0^4 + \omega^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \frac{\alpha^2}{m^2} \omega^2 \right) = -2\omega_0^2 + 2\omega \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{2\omega_0}{2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2} \right)}$$

$$\min \left(\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} w\right)^2} \right) = \frac{d}{dw} \left(\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} w\right)^2} \right) = 0$$

$$= \frac{+2w - 2w_0 + \frac{2\alpha^2}{m^2} w}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} w\right)^2}} = 0$$

les solutions de w qui annulent le numérateur sont recherchées

$$= \frac{2w \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} w\right)^2}} = \frac{2w_0}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m} w\right)^2}}$$

$$\Rightarrow w_r = \frac{w_0}{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} = w_0 \frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{w_0^2 m^2}} = w_0 \frac{1}{1 + \chi^2}$$

$$\Rightarrow w_r = \frac{w_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{m^2}\right)}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{m^2}\right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)}$$

$$\text{Si } \left(\frac{\alpha}{m}\right) \ll 1 \Rightarrow w_r = w_0$$

D'après la littérature [femto-optique / mécanique / oscillateurs harmoniques]

$$\boxed{w_r = \sqrt{w_0^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}}} \quad \text{D.L.} \quad = w_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{w_0^2} \frac{\alpha^2}{m^2}\right) = w_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{w_0^2 m^2}\right)$$

$$\text{Si } \frac{\alpha}{m} \ll w_0 \text{ alors } w_r = w_0$$

$$|A(w=w_r)| = \frac{w_0^2 a}{\sqrt{\left(w_0^2 - w_0^2 + \frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{m^2} \left(w_0^2 - \frac{\alpha^2}{m^2}\right)}} = \frac{w_0^2 a}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^4 - \left(\frac{\alpha}{m}\right)^4 + \frac{\alpha^2}{m^2} w_0^2}}$$

$$|A(w=w_r)| = \frac{w_0 a}{\left(\frac{\alpha}{m}\right) \text{ amortissement }} \quad \left(\text{plus l'amortissement est faible et plus la résonance est prononcée lorsque } w = w_0 \right)$$

Etude de la phase en fonction de la fréquence : $\tan(\varphi) = f(\omega)$

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega \frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

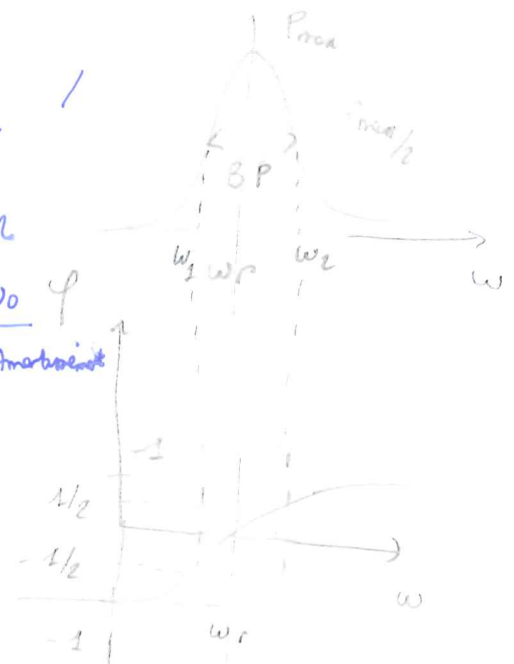
Les pulsations de la bande passante du signal correspondent aux pulsations qui correspondent à la moitié de l'écart de phase maximal, c'est-à-dire :

$$\frac{\omega_{1,2} \frac{\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2} = \pm 1 \quad \text{DANS LA LITTÉRATURE}$$

POUR TROUVER

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Amortissement Amortissement



$$\Rightarrow \omega_{1,2} \frac{\alpha}{m} = \pm 1 (\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)$$

$$\Rightarrow \pm \frac{\alpha}{m} \omega_{1,2} + \omega_{1,2}^2 - \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 \pm \frac{\alpha}{m} \frac{1}{\omega_{1,2}} - \omega_0^2 = 0$$

Les solutions positives sont :

$$\omega_1 = -\frac{\alpha}{m} \frac{1}{\omega_1} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\alpha}{m} \frac{1}{\omega_1}\right)^2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\alpha}{m} \frac{1}{\omega_2} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\alpha}{m} \frac{1}{\omega_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = 2 \left(\frac{\alpha}{m} \frac{1}{\omega_1} \right) = \frac{\alpha}{m} \frac{4}{\omega_1} = \Delta\omega$$

Par définition le facteur de qualité du résonateur qui subit une excitation externe :

(DONNE LA SENSIBILITÉ DE L'OSCILLATEUR À L'EXCITATION EXTERNE

≡ RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE DU SYSTÈME CAPTÉE AUTOUR DE LA FRÉQUENCE DE RÉSONNANCE)

ERRONÉ : LA

BANDE PASSANTE

CORRESPOND AUX

FRÉQUENCES OÙ

L'AMPLITUDE EST

DIVISÉE PAR 2

ET NON PAS

OÙ LA PHASE

EST DIVISÉE PAR 2!!!

Fréquence propre
(≡ à vide)
du résonateur

Amortissement

$$Q = \frac{\omega_R}{\Delta\omega} = \frac{\omega_R}{\frac{\alpha}{m} \frac{4}{\omega_1}} \approx \frac{\omega_0}{\frac{\alpha}{m} \frac{4}{\omega_1}}$$

2 - NORMALEMENT CE TERME N'EST PAS PRÉSENT ET Q = \frac{\omega_0}{\frac{\alpha}{m}}

la bande passante se calcule par rapport à l'amplitude et non pas par rapport à la phase :

$$|A(\omega_{1,2})| = \frac{1}{2} |A|_{\text{max}} = \frac{1}{2} |A(\omega = \omega_R)| \approx \frac{1}{2} |A(\omega = \omega_0)|$$

↑ par des faibles amortissements

$$= \frac{1}{2} \frac{\omega_0 a}{\frac{\alpha}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\omega_0^2} a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \cancel{\omega_{1,2}^2})^2 + (\omega_{1,2} \frac{\alpha}{m})^2}} = \frac{1}{2} \frac{\cancel{\omega_0} a}{\frac{\alpha}{m}}$$

$$\Rightarrow 2 \omega_0 \frac{\alpha}{m} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (\omega_{1,2} \frac{\alpha}{m})^2}$$

$$\Rightarrow 4 \omega_0^2 \frac{\alpha^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (\omega_{1,2} \frac{\alpha}{m})^2$$

$$\Rightarrow 4 \omega_0^2 \frac{\alpha^2}{m^2} = \omega_0^4 + \omega_{1,2}^4 + 2 \omega_0 \omega_{1,2}^2 + \omega_{1,2}^2 \frac{\alpha^2}{m^2}$$

NE PERMET PAS NON PLUS DE CONCLURE !!!

Etude énergétique : (par la dérivée première du mouvement)

À partir de l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{k}{m} a \cos(\omega t)$$

$\times \dot{y}$

$$\dot{y} \ddot{y} + \frac{\alpha}{m} (\dot{y})^2 + \frac{k}{m} y \dot{y} = \frac{k}{m} a \cos(\omega t) \dot{y}$$

Rappel : $y_0(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + |A| \cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow \dot{y}_0(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t) - |A| \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) + \frac{\alpha}{m} (\dot{y})^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{m} y^2 \right) = \frac{k}{m} a \cos(\omega t) \dot{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k y^2 \right) + \alpha (\dot{y})^2 = k a \cos(\omega t) \dot{y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k y^2 \right) = \underbrace{-\alpha \dot{y}^2}_{\text{Puisance dissipée par frottement}} + \underbrace{k a \cos(\omega t) \dot{y}}_{\text{Puisance injectée par la réponse forcée}}$$

Puisance

dissipée

par frottement

Puisance injectée

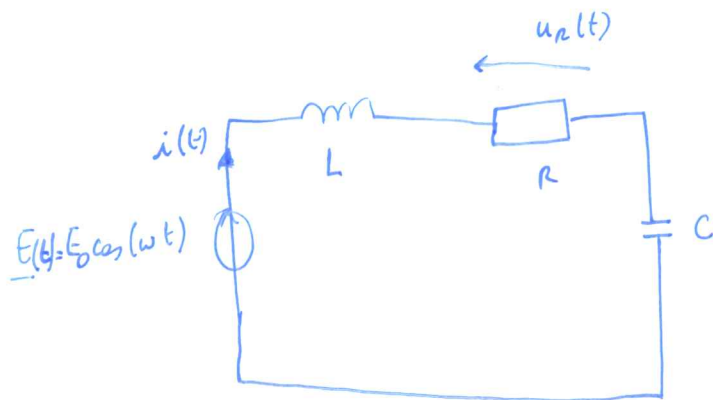
par la réponse forcée

$\Rightarrow$ L'OSILLATION OSILLE S'IL RESONNE, C'EST - À-DIRE SI :

$$- \omega_{externe} = \omega_0 = \omega_0 \pm \frac{\text{Bande Passante}}{2}$$

$$- \text{Puisance injectée} \geq \text{Puisance dissipée}$$

Circuit RLC:



$i(t)$ non accessible avec
un ampèremètre (uniquement
le voltmètre après assemblage)

$\Rightarrow$ mesure de $i(t)$ se fait
par la mesure de $u_R(t)$

$$\underline{i} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R}$$

$$= \frac{\underline{E}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{\frac{1}{j\omega RC} + j\frac{L}{R}\omega + 1}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\left(-\frac{1}{RC\omega} + \frac{L\omega}{R}\right)} = \frac{\underline{E}/R}{1 + j\frac{-L\omega + LC\omega^2}{LRC\omega}}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\left(\frac{-L}{R\omega} + \frac{LC\omega}{R}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\left(-\frac{L}{R}\frac{\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega}{RC\omega_0^2}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\frac{1}{R}\left(-\frac{L\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega}{C\omega_0^2}\right)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\frac{L}{RC}\left(-\frac{C\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega}{L\omega_0^2}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\frac{L}{RC}\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\frac{L}{RC}\left(C\omega - \frac{L}{\omega}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + j\frac{L}{RC}\left(\frac{LC\omega}{L} - \frac{LC}{C\omega}\right)}$$

$$= \frac{\underline{E}/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

⚠️⚠️⚠️ PAS LE BON DEVELOPPEMENT POUR L'ANALOGIE
CAR IL S'AGIT D'UN DEVELOPPEMENT EN FREQUENCES ET
NON EN TEMPS

À la place:

loi des mailles:

$$\underline{E} = R i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$\underline{E} = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$\underline{E} = R \dot{q} + L \ddot{q} + \frac{1}{C} q(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{E}}{L} = \ddot{q} + \underbrace{\left(\frac{R}{L}\right)}_{\omega_0} \dot{q} + \underbrace{\left(\frac{1}{LC}\right)}_{\omega_0^2} q(t)$$

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{\xi} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = Q \Rightarrow \xi = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L}{R \sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Passe à l'énergie:



L'énergie (ou la puissance) sont spécifiés à chaque élément du circuit, ils sont mesurés en utilisant le courant qui passe dans l'élément et la tension aux bornes de l'élément



Expr: $U_{\text{élémt}} \times q_{\text{élémt}}$

$$\Rightarrow E_{\text{forme}} = U_{\text{générateur}} \cdot q = R \int q \frac{dq}{dt} + L \dot{q} q + \frac{1}{C} q^2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(R \frac{q^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \dot{q}^2 \right) + \frac{1}{C} q^2$$

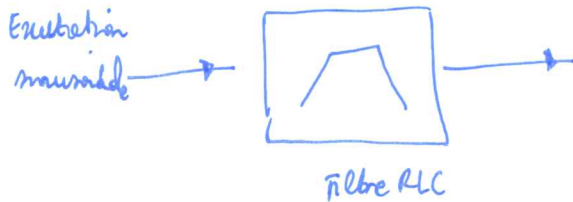
Passe à la puissance, à la place:

$$= q(t) \frac{dq(t)}{dt}$$

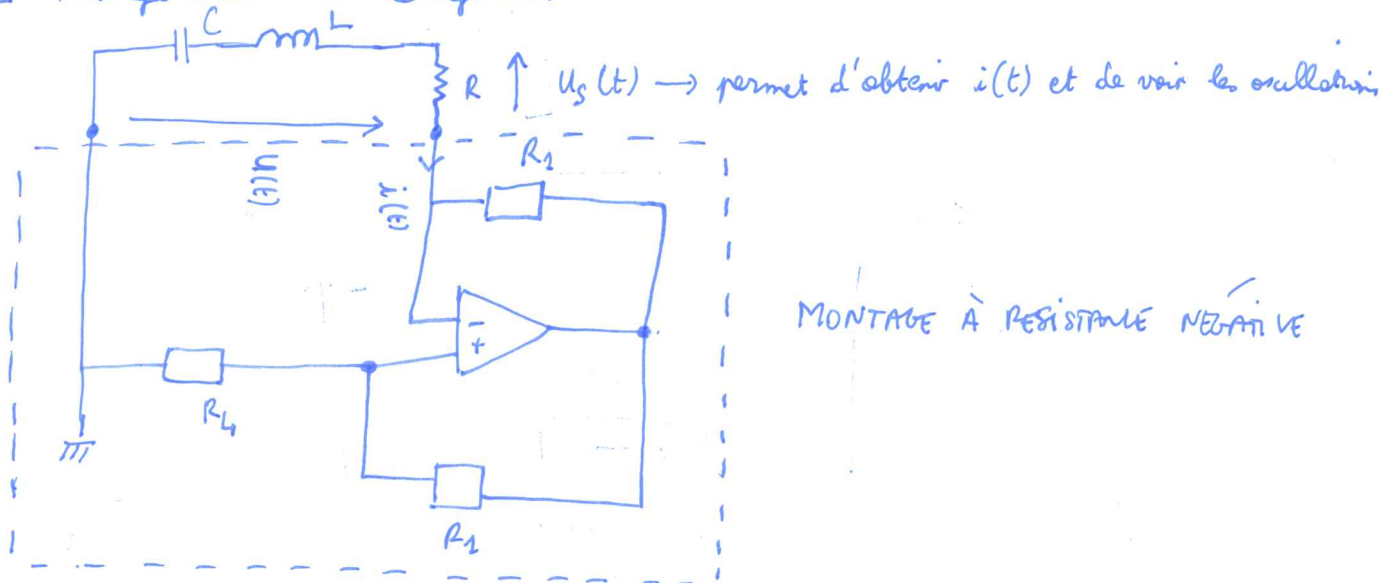
$$U_{\text{générateur}} \cdot i(t) = R i(t) \cdot i(t) + L \frac{di}{dt} i(t) + \frac{1}{C} (q(t) \cdot i(t))$$

$$\underbrace{U_{\text{générateur}} \cdot i(t)}_{\text{P fournie}} = \underbrace{R i^2}_{\text{P dissipée}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right)}_{\text{P inductance}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2C} q^2 \right)}_{\text{P condensateur}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2C} q^2 \right)$$

- Pour faire osciller ce montage: $\Rightarrow$ OBJECTIF : COMPENSER LES PERTES JOULES DANS LA RESISTANCE PAR UN APPORT D'ENERGIE ($\equiv$ "RESISTANCE R NEGATIVE")
- Générateur externe (peu performant car la chaleur peut faire sortir la fréquence du signal envoyée hors de la BP du circuit résonnant)



- Montage avec Résistance négative:



Expériences :

- Réaliser un oscillateur mécanique avec { moteur (vibreur) + poutre } dans de l'eau (pour obtenir les frottements visqueux (ou directement dans l'air)) et noter l'amplitude des oscillations

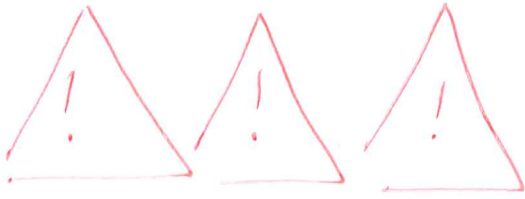
⇒ Tracer le diagramme de l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence (utiliser MATLAB → MATPLOTLIB DE "PLOT" ???)
+ Mesure d'inertie (type B)

- Réaliser un RLC ( Aux valeurs de R, L et C) et tracer l'amplitude en fonction de la fréquence d'entrée


SANS CAPACITÉS
CERAMIQUES,
LES MONTES
SONT POUSSÉS !!!

- SIMULER EN LTSPICE (ou PSpice) UN MONTAGE À RESISTANCE NÉGATIVE !!!
+ FFT
+ Bande Passante

Approfondissement 1: Corde Melde



LE COUPLAGE D'OSCILLATEUR
CRÉE UNE DISSIPATION DE
L'ÉNERGIE SPATIALE (L'ÉNERGIE

EST TRANSMISE D'UN OSCILLATEUR

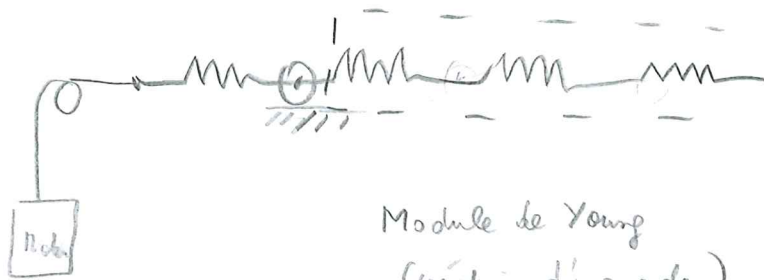
À L'AUTRE $\Rightarrow$ UNE

ONDE EST CRÉÉE

(UNE ONDE PEUT ÊTRE MODIFIÉE
PAR L'ÉNERGIE DISSIPÉE PAR

UN COUPLAGE D'OSCILLATEUR

SANS FROTTEMENTS)

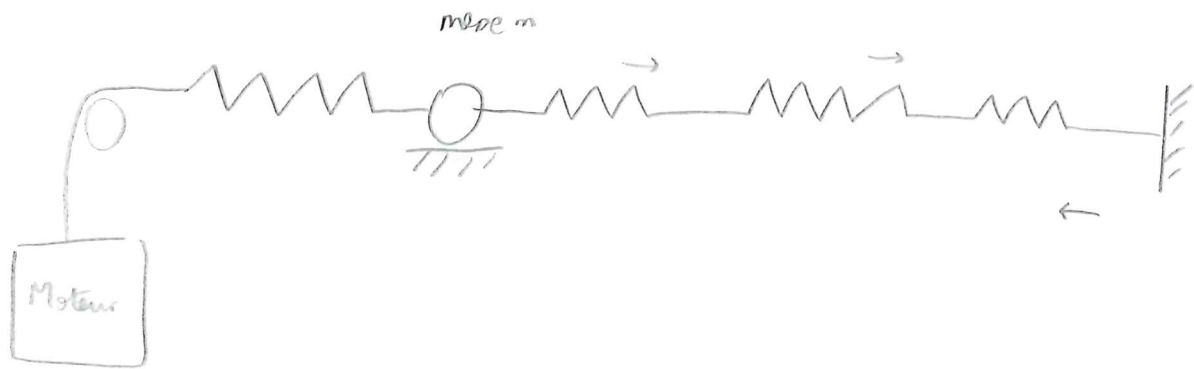


Module de Young
(création d'une onde)

$\Rightarrow$ L'EXCITATEUR (L'A.I.M. ÉTERNE) DOIT

DONC COMPENSER :

- LES PERTES DU AUX FROTTEMENTS DE LA MASSE
- LA DISSIPATION D'ÉNERGIE PAR LES OSCILLATEURS COUPLÉS



Pour que les oscillateurs couplés oscillent, il faut que l'énergie revienne

⇒ il faut une interface à la fin,

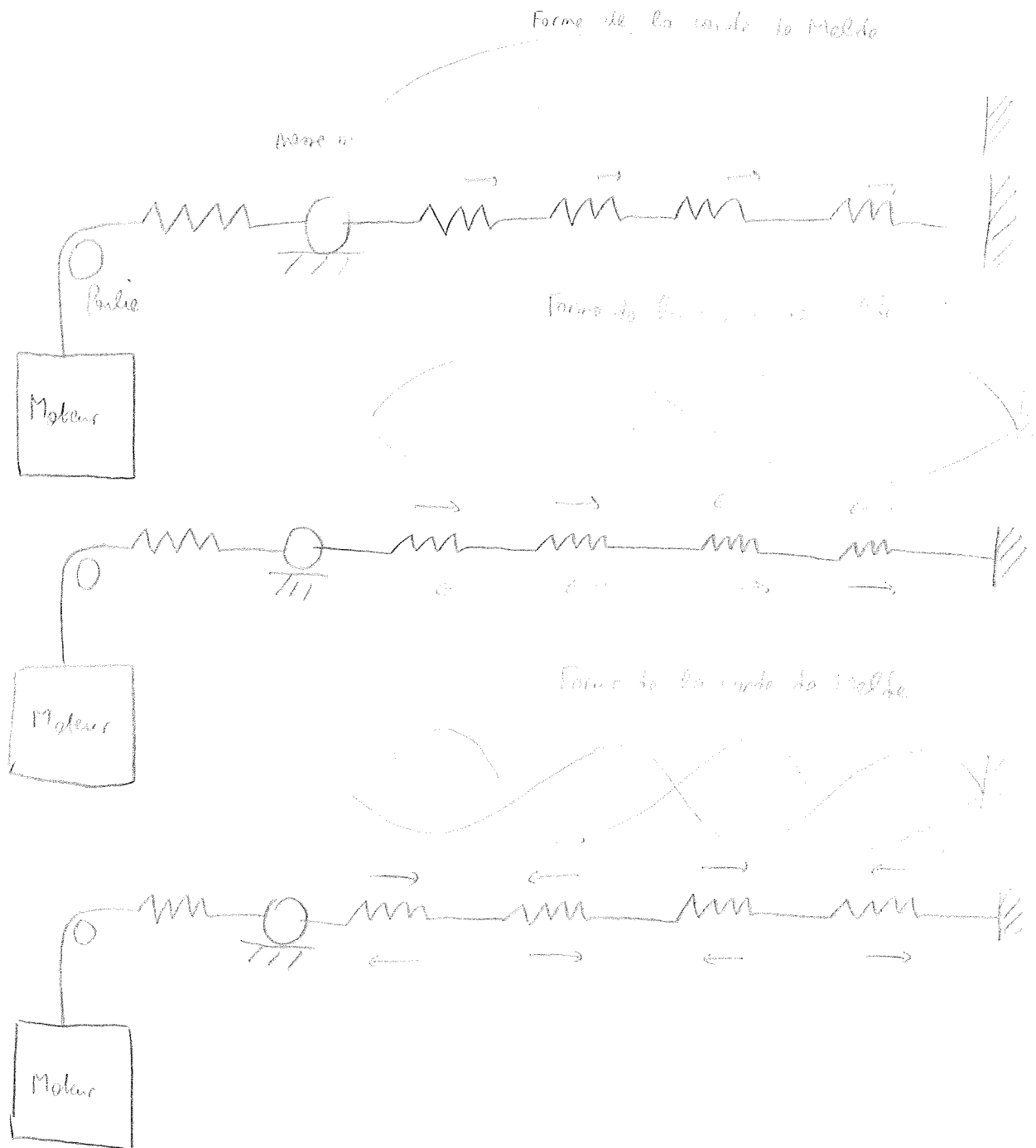
il faut créer une onde stationnaire !!!

⇒ il faut créer une onde stationnaire !!!



La fréquence propre des oscillateurs couplés (≡ module de Young (1D), corde de Melde (2D), ...)

N'est pas unique, elle correspond à la fréquence du fondamental (où tous les ressorts vibrent en phase) et de toutes les harmoniques



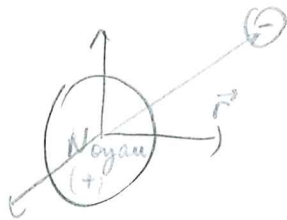
Développement de la carte de Melde : - [demande de salle - fr / ... / LP 48 Plénaires de
réunion dans les différents
domaines de la (physique)]

- [pers. ens - lyon fr / ... / LP 48 Plénaires de réunion
dans les différents domaines
de la (physique)]

Extension 1: Modèle de Drude de l'électron (loi d'Ohm microscopique) et four à micro-ondes:

Developpements disponibles à [demande la salle fr / ... / LP48 : phénomènes de résonance dans les différents domaines de la physique]

Système
 { Electron de masse m et de charge $-e$ }



Reportel du rayon supposé *galiléen* étudié en base cartésienne

L'ELECTRON LIBRE QUI PARTICIPE AU COURANT S'ÉLOIGNE UNIFORMEMENT DE L'ATOME !!!

$$m_e \ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_{ext}$$

(PAS DE FORCES FICTIVES DANS CE MODÈLE)



LA BASE NE DOIT PAS AVOIR DE ROTATION PAR RAPPORT À LA BASE CARTÉSIENNE (SINON INTRODUCTION DE FORCES FICTIVES !!!)

$$m_e \ddot{\vec{r}} = -m_e \omega_0^2 \vec{r} - \frac{m_e \dot{\vec{r}}}{\tau} - (e \vec{E}_{ext} + e \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}_{ext})$$

force de rappel du rayon

frictionnel fluide (le métal est une mer d'électrons)

négligeable devant la force de Lorentz électrique

On reconnaît la formule d'un oscillateur harmonique forcé par un champ $\vec{E}_{ext}(t)$

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_h(t) + \vec{r}_p(t)$$

Après un temps très court: $\vec{r}_h(t) \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{r}_j(t) = \vec{r}_p(t)$ (régime permanent)

$$\Rightarrow \vec{r}_p(t) = \frac{\omega_0^2 e |\vec{E}_{ext}|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow |Z| = \frac{|\vec{E}_{ext}|}{|\vec{j}|} = \frac{|\vec{E}_{ext}|}{|e \cdot \vec{r}|} = \frac{|\vec{E}_{ext}|}{e |\vec{r}|}$$

$\vec{j} = e \vec{v}$ (pour un courant de conduction)

$$\Rightarrow |Z| = f(\omega)$$

Notamment $|Z|_{\text{eau}} = f(\omega)$ exploité pour le four à micro-ondes (monter la courbe !!!)

Extension 2.

Carte de Fabry - Perrot. permet d'augmenter la résolution des interférences obtenues par l'interféromètre de Michelson