

LP49: Portraits de phase d'un oscillateur harmonique:

Rappel: équation différentielle d'un oscillateur harmonique sans frottements:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Pensez aux énergies $\int dE = \int v dt = \int \dot{\theta} dt$ par une notation

Méthode de l'intégrale première des mouvements

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \dot{\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0^2}{2} \theta^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \theta^2 \right) = 0$$

Plan:

- partir de l'équation pour arriver au portrait de phase d'un oscillateur idéal

Ne se développer les formes réelles de $\dot{\theta}$, des intermédiaires $\dot{\theta}$ par rapport à θ (à partir d'un alignement)

- effet amortissement (regard d'un terme relatif dans l'équation de mouvement qui traduit un amortissement)

- frottement

- résonance + frottement $\Rightarrow$ oscillateur de Van der Pol

- Portrait de phase de l'oscillateur à pont de Wien

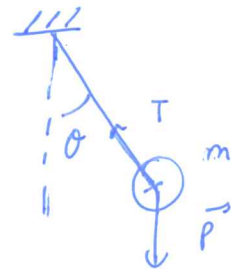


POUR PASSER AUX EXERCICES, IL FAUT FAIRE APPARAÎTRE LA

MATHÉ À PARTIR DE ω_0 . PAR EXEMPLE

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ pour un pendule simple}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ pour un oscillateur à ressort}$$



En multipliant chaque terme de l'équation par m:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \theta^2 \right) = 0$$



DEVELOPPER PLUTÔT CE CAS CONCRET (i.e.)

Par intégration entre 0 et t

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 \theta^2}_{E_p} = \text{Constante}$$

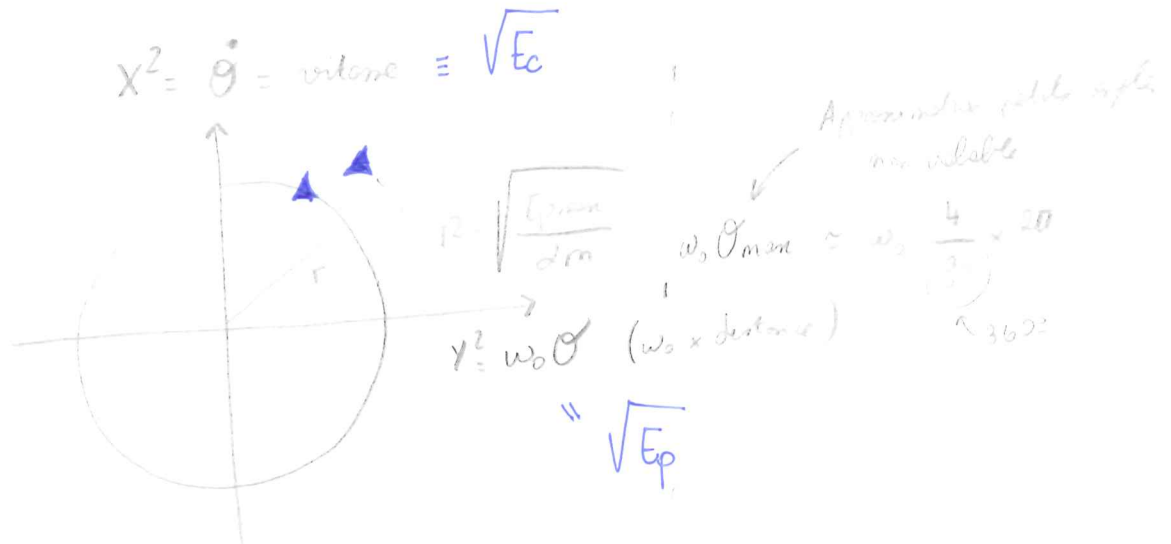
"E_m (en l'absence de frottements, l'énergie mécanique est conservée)"



$$\Rightarrow \underbrace{\dot{\theta}^2}_{x^2} + \underbrace{(\omega_0 \theta)^2}_{y^2} = \frac{E_m}{2m} \quad \text{Energie lorsque la vitesse est nulle}$$

(proviens de l'intégrale première
du mouvement de :
 $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 !!!$)

Il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{\frac{E_{pm}}{2m}}$



1^{ère} remarque: Si E_m est constante (absence de frottements) $\Rightarrow E_c + E_p = \text{constante}$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 = \text{constante}$
 $\Rightarrow$ les cercles sont de taille constante

2^{ème} remarque: Si E_m est constante $\Rightarrow$ lorsque $E_c \uparrow$ alors $E_p \downarrow$ et inversement
 $\Rightarrow$ les cercles sont décrits dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire)

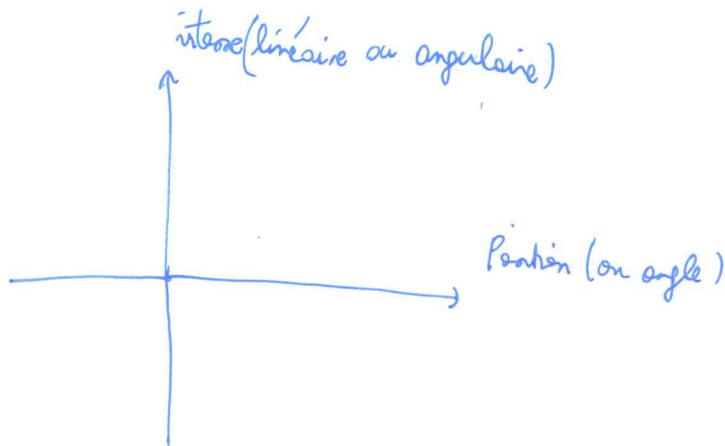
3^{ème} remarque: $\frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \theta^2 = \text{Constante} (E_m)$ est l'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes dans l'espace considéré

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{m}\right)^2} + \frac{\theta^2}{\omega_0^2 \frac{2}{m}} = R^2 \quad \left(\equiv \frac{\dot{\theta}^2}{a^2} + \frac{\theta^2}{b^2} = R^2 \right)$$

Si on multiplie tous les termes par a^2 : $\dot{\theta}^2 + \left(\frac{a}{b} \theta\right)^2 = a^2 R^2$ on obtient l'équation d'un cercle si le déplacement de variable $x' = \dot{\theta}$ et $y' = \frac{a}{b} \theta$ est effectué !!!

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

DES PORTRAITS DE PHASE



2 méthodes pour le tracé du diagramme :

↓
Résolution de l'équation différentielle et détermination de la solution pour avoir le tracé

↓
Mettre l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation contenant d'un seul par rapport de variables

1) Cas de l'oscillateur simple et approximation petits angles

Méthode 1:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$x, \dot{x}$ (Dérivée première du mouvement)

Méthode 2:

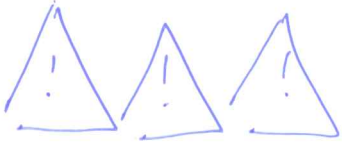
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\dot{x} \ddot{x} + \omega_0^2 x \dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 = \text{Constante (E.m.)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{x}^2}_{x^2} + \underbrace{(\omega_0 x)^2}_{y^2} = \underbrace{(2 \text{ Constante})}_{R^2}$$



UTILISATION D'UNE IA (CHAGPT)

POUR RÉSOUDRE LES QUESTIONS

- MATHÉMATIQUES

- VOCABULAIRE / CONCEPTS

PERMET UN GAIN DE TEMPS CONSIDÉRABLE

- Effets harmoniques

Sous l'approximation des petits angles, l'équation caractéristique d'un oscillateur est :
(modèle sans frottements)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

$\Rightarrow$ La solution de cette équation ne sera pas purement sinusoïdale $\Rightarrow$ anharmonicité

Description mathématique:

Méthode 1 : Réduction de l'équation différentielle d'ordre 2

$$x(t) = 2 \arcsin(k \sin(\omega_0 t, k))$$

$$\uparrow \quad x(t) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

fonction
elliptique
de Jacobi

Mise en forme de l'équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation cartésienne elliptique (par changement de variable)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

$$\times \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) \dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \cos(\theta) \right) = 0$$

Par intégration de chaque côté de l'équation :

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \cos(\theta) = \text{constante}$$

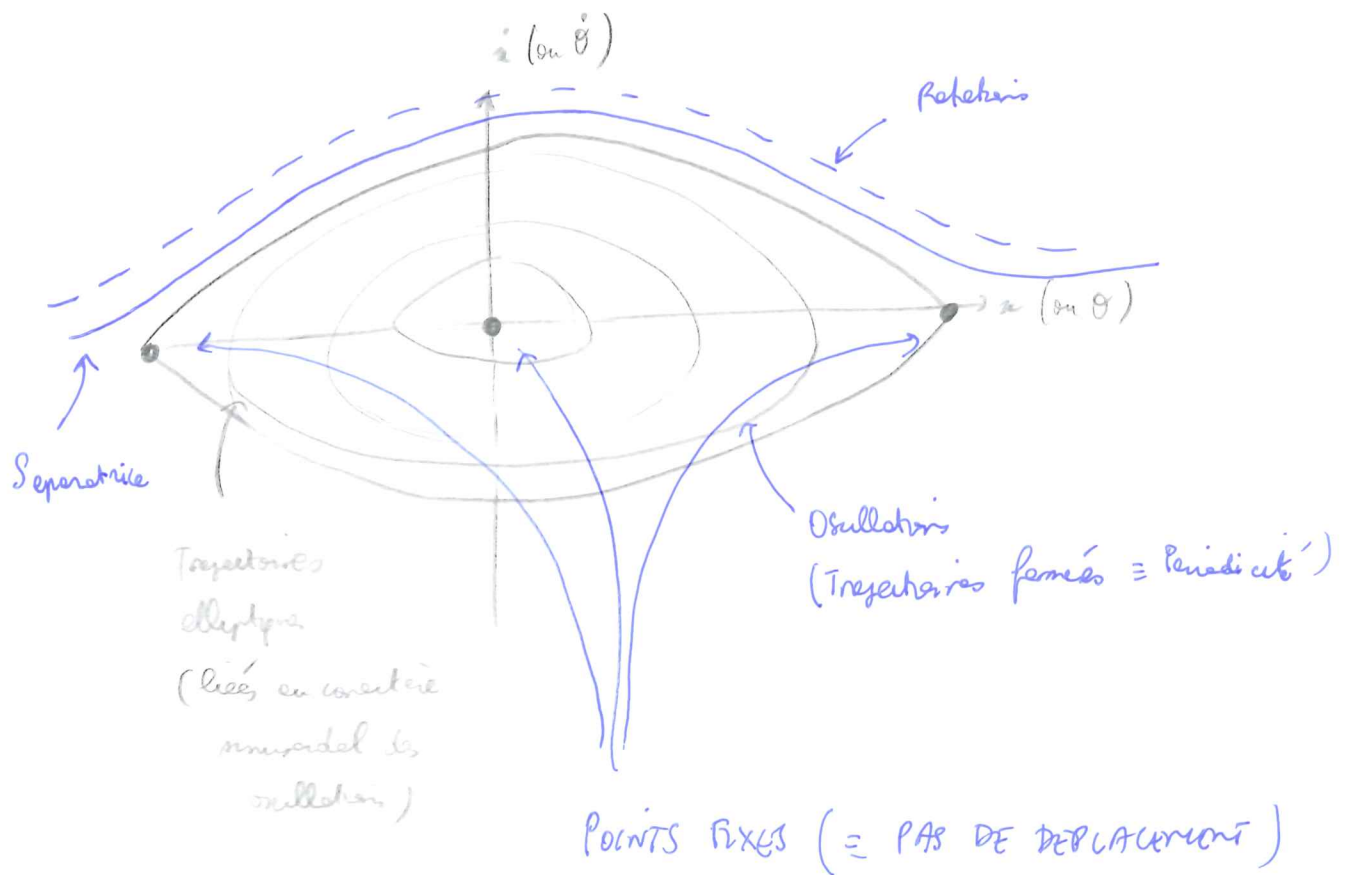
$$\text{En posant } X = \dot{\theta}' \text{ et } Y = \cos \theta$$

$$X^2 + 2\omega_0^2 \cos\left(\frac{Y}{\omega_0}\right) = 2E_m$$

$$\text{Si l'on choisit } X_2 = X' \text{ et } Y_2 = 2\omega_0 \cos\left(\frac{Y}{2}\right)$$

alors :

$$X_2^2 + Y_2^2 = \text{constante} \quad (\text{équation d'un cercle})$$



$\Rightarrow$ TRAJECTOIRES
DE PLUS EN PLUS
APPLATIES
DÈS LORS QUE
 θ_0 AUGMENTE
JUSQU'À LA
COUSSE SÉPARATRICE

$\Rightarrow$ LES OSCILLATIONS SE
FONT AUTOUR DE CE POINT
DANS L'ESPACE (x, z) !!!
 $\Rightarrow$ Plusieurs points fixes $\equiv$ plusieurs
ondes d'oscillation ???

Les courbes ne se croisent pas car d'après le déterminisme physique, un système
a qu'une seule façon d'évoluer

- Avec amortissement :

l'équation différentielle qui caractérise l'amortissement devant :

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

(Pendule implique une rotation)

$$\text{ou } \ddot{x} + \lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(pendule implique une translation)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta}{2} \right) = -\lambda \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \frac{\theta}{2} = -\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

Si $\dot{\theta}$ n'est pas connu en fonction de t , l'intégrale ne peut être calculée

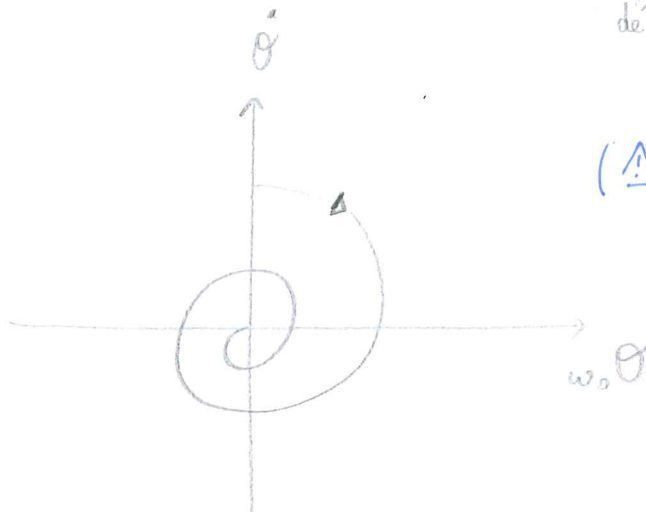
$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \theta = -m \lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

$$\underbrace{\quad}_{E_c} \quad \underbrace{\quad}_{E_p} \quad \underbrace{\quad}_{E_m}$$

E_m , c'est-à-dire le rayon du cercle ($\sqrt{E_c} = f(\sqrt{E_p})$)

décroit en fonction du temps à cause des frottements ($\Rightarrow$ spirale)

($\triangle \triangle \triangle$) ON PEUT DIRE QUE LE RAYON DU CERCLE DÉCROÎT UNIFORMEMENT SI ON LINÉARISE $-m\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$!!
DONC VARIABLE AUTOUR D'UNE CERTAINE VALEUR)



Équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes (DANS L'ESPACE CONSIDÉRÉ)

$$\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}_{R^2} = -2\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

(PASSAGE AUX COORDONNÉES POLAIRES)

$$R e^{i\varphi} = -2\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} e^{i(\tan^{-1} \frac{y}{x})} = -2\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

Résolution de l'équation différentielle
d'ordre 2

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = e^{-\lambda t/2} (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t))$$

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\lambda t/2} \left[-\frac{\lambda}{2} (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) - A \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t) \right]$$

Mise en forme de l'équation différentielle
d'ordre 2 sous la forme d'une
équation cartésienne d'ellipse
par changement de variable

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\times \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} \dot{\theta} + \lambda \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \dot{\theta} \theta = 0 \right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0^2}{2} \theta^2 \right) = -\lambda \dot{\theta}^2$$

En intégrant les termes de chaque côté
de l'équation :

$$\dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = -2\lambda \int \dot{\theta}^2 dt + C$$

$E_{m|_0}$

En posant $X = \dot{\theta}$ et $Y = \omega_0 \theta$,
l'équation peut être mise sous
la forme d'une équation de cercle
en coordonnées cartésiennes

$$X^2 + Y^2 = R(t)^2$$

$$X^2 + Y^2 = E_{m|_0} - 2\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

Parte
d'énergie
qui diminue
progressivement

Systèmes forcés : (SANS ou AVEC AMORTISSEMENT)
(APPROXIMATION DES PETITS ANGLES)

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A \cos(\omega t)$$

(SANS AMORTISSEMENT) (réponse libre)
ou $\omega \neq \omega_0$ (sauf en résonance) (AVEC AMORTISSEMENT)

Description mathématique :

Résolution de l'équation
différentielle d'ordre 2

1) Sans amortissement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = A \cos(\omega t)$$

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

Formule valable hors résonance
(sinon division par 0) !!!

Résonance si
 $\omega = \omega_0$

Forme plus générale :

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t)$$

Autre résultat avec la méthode
fig. penta-physique fr /
méthode de l'enveloppe
(complexe)

2) Avec amortissement

$$\theta(t) = e^{-\lambda t/2} \left[C_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t\right) \right] \times$$

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + (\lambda \omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Mise en forme de l'équation différentielle
d'ordre 2 sous la forme d'une
équation cartésienne d'ellipse
par changement de variable

$$\ddot{\theta} + (\lambda \dot{\theta}) + \omega_0^2 \theta = A \cos(\omega t)$$

$\times \dot{\theta}$ (cas général)

Intégrale première du mouvement :

$$\dot{\theta}^2 + \lambda \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 = A \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} \ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta \dot{\theta} &= A \dot{\theta} \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) + \frac{d}{dt} (\omega_0^2 \theta^2) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{A \dot{\theta}}{\omega} \sin(\omega t) \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 \theta^2 &= \frac{A \dot{\theta}}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\lambda}{2} \int \dot{\theta}^2 dt \end{aligned}$$

En posant : $X = \dot{\theta}$, $Y = \omega_0 \theta$:

1) Sans amortissement

$$X^2 + Y^2 = \frac{A}{\omega} X \sin(\omega t)$$

2) Avec amortissement

$$X^2 + Y^2 = R^2(t) + \frac{A}{\omega} X \sin(\omega t)$$

$$- 2\lambda \int \dot{\theta}^2 dt$$

- Pour l'oscillateur amorti et forcé :



LA RÉPONSE LIBRE N'EST QUE DE COURTE DURÉE
POUR UN OSCILLATEUR AMORTI (ET FORCÉ)

⇒ DANS LE CAS D'UN OSCILLATEUR AMORTI FORCÉ,
UNE FOIS LA RÉPONSE TRANSITOIRE FINIE $\theta_H(t) \rightarrow 0$,
 $\theta_f(t) = \theta_p(t)$ EN RÉGIME PERMANENT

⇒ DANS LE CAS D'UN OSCILLATEUR AMORTI FORCÉ, EN
RÉGIME PERMANENT :

$$\theta_f(t) = \theta_p(t) = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (d\omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi) = X_0$$

$$\dot{\theta}_f(t) = -\omega X_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

En éliminant le temps pour obtenir une équation
entre θ_f et $\dot{\theta}_f$:

Portrait de phase d'un
oscillateur amorti
et forcé :

$$\theta_f = X_0 \cos(\omega t + \varphi) = X_0 \textcircled{X}$$

$$\dot{\theta}_f = -\omega X_0 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega X_0 \textcircled{X'}$$

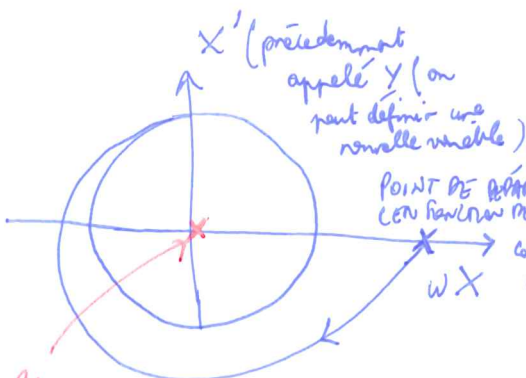
Nouvelle
variable

PUIS ON UTILISE L'IDENTITÉ FONDAMENTALE :

$$\cos^2(\) + \sin^2(\) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{X}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{X'}{\omega X_0}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (\omega X)^2 + (X')^2 = X_0^2 = \frac{A^2}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (d\omega)^2)}$$



Point fixe
= centre d'une
rotation

Spirale (régime transitoire)

DANS LE CAS D'UN OSCILLATEUR AMORTI FORCÉ, LA RÉPONSE TRANSITOIRE FINIE $\theta_H(t) \rightarrow 0$,
LA RÉPONSE PERMANENTE EST $\theta_f(t) = \theta_p(t)$

b) Avec résonance :

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{2\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

↑ Résolution avec des solutions particulières
de type $\sin$



Chet GPT a bien différentié la
résolution de l'équation différentielle

$$\theta'' + \omega_0^2 \theta = A \cos(\omega t)$$

lorsque :

$$- \omega \neq \omega_0, \theta_p = \dots$$

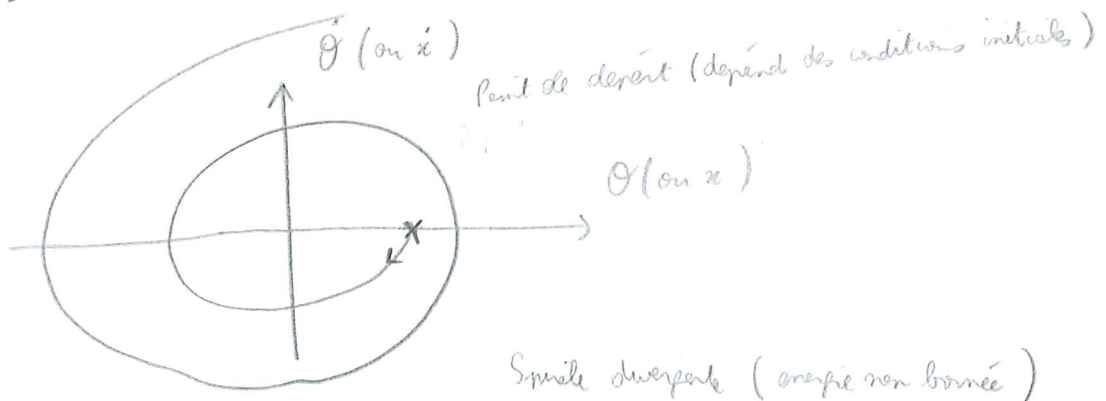
$$- \omega = \omega_0, \theta_p = \dots$$

(ou) [d'après femto-physique.fr / Oscillateurs Harmoniques] qui utilise la
méthode de l'exponentielle complexe car $A \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(A e^{i\omega t})$

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (d\omega)^2}}$$

Ne s'annule pas, $\forall$ la
valeur de ω réel !!!

Après avoir calculé $\theta(t)$ en fonction de la méthode choisie, le portrait de phase peut être obtenu :



- Pour l'oscillateur NON amorti ET FORCÉ :



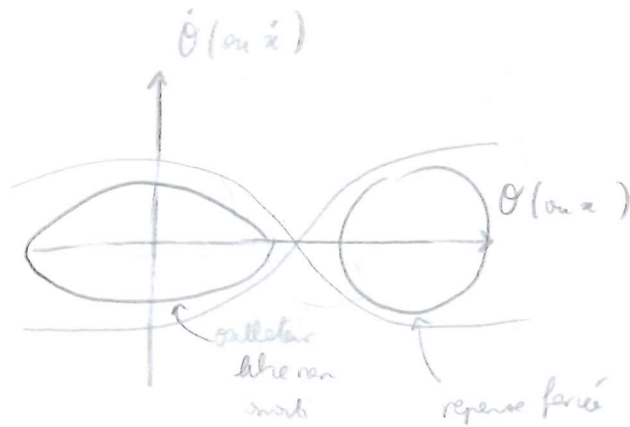
$$\theta_f(t) = \underbrace{\theta_h(t)}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{\theta_p(t)}_{\text{Réponse forcée}}$$

MAIS DANS LE CAS IL N'Y A PAS DE RÉPONSE TRANSITOIRE
CAR $\theta_h(t)$ (LA RÉPONSE LIBRE) NE S'ATTÉNUÉ PAS DANS
LE TEMPS !!!

a) Sans résonance : $(\omega \neq \omega_0 \pm \frac{B\ell}{2})$

$$\theta(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

$$\dot{\theta}(t) = \dots$$



???

(A FAIRE

CAR NON

OBTENU DANS

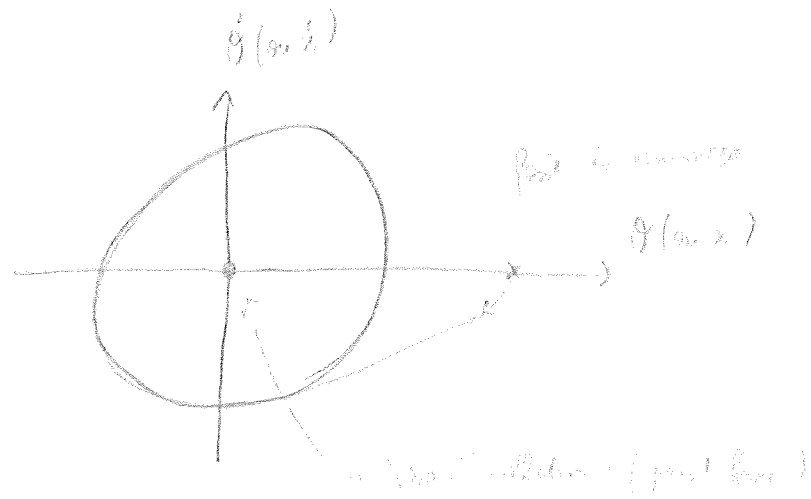
LA LITTÉRATURE)

- Trajectoires non fermées

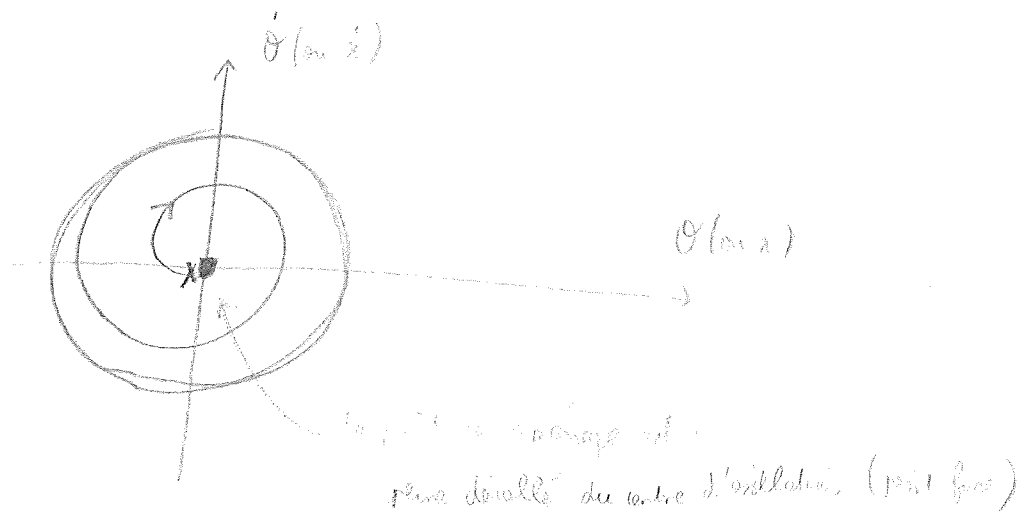
- Trajectoires denses qui délimitent une zone

- 2 points fixes

Avec comme conditions initiales : $\begin{cases} \varphi_0 = \varphi_{osc} \\ \dot{\varphi}_0 = 0 \end{cases}$



Avec comme conditions : $\begin{cases} \varphi_0 = \varepsilon \\ \dot{\varphi}_0 = 0 \end{cases}$ un tout petit ε



Système auto-excitateur : VAN DER POL (AVEC UN AMORTISSEMENT QUI A UNE CARACTÉRISTIQUE)

$$\ddot{\theta} - \epsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 \right) \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \left(\text{L'ÉQUATION DE VAN DER POL MODÉLISE LE COMPORTEMENT D'UN OSCILLATEUR AUTO-ENTRETIENU} \right)$$

Si l'amplitude des oscillations $\theta > 0 \Rightarrow$ l'amortissement est négatif : le système perd de l'énergie

Si l'amplitude des oscillations $\theta < 0 \Rightarrow$ l'amortissement est positif : le système gagne de l'énergie

$\Rightarrow$ Cet oscillateur permet ainsi, quelque les conditions initiales, de tendre vers un régime permanent d'amplitude d'oscillations bien définie

Description mathématique :

Résolution de l'équation

différentielle d'ordre 2

RETRO ACTION :

ANALYSE DE

LA VARIABLE DE

SORTIE POUR

CORRIGER LE

COMPORTEMENT DU

SYSTÈME

Mise en forme de l'équation

différentielle d'ordre 2 sous

la forme d'une équation

canonique d'un oscillateur

(par changement de variable)

Expériences:

- Pendule simple + film + extraction partiel 2D : $\theta(t) < 4^\circ$ et $\dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt}$
et tracé $\dot{\theta}(t) = f(\theta(t))$ sur LATIS PRO
- Pendule pesant : même expérience mais en ayant des angles $> 4^\circ$ (anharmonique)
- Ressort dans un fluide (pendule amorti sur un seul axe)

- Idéalement : PROGRAMME PYTHON POUR BIEN COMPRENDRE L'INFLUENCE
DE CHAQUE PARAMÈTRE

Répondre :

(ou)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t) \quad (\text{SOLUTIONS EXACTES})$$
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 \sin(x) = A \cos(\omega t) \quad (\text{IDENTIFIANT})$$
$$x(t) = \dots$$
$$\dot{x}(t) = \dots$$

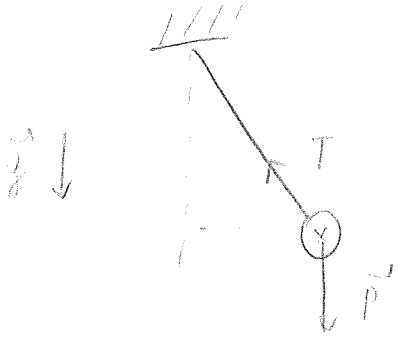
- Oscillateur électroniques

- Van Der Pol (
- Pont de Wien (modélisé par une équation de Van Der Pol)
- Oscillateur à résistance négative $\rightarrow$ Modélisé par un oscillateur non amorti
non forcé si la résistance négative créée par
l'AOP compense exactement la résistance du
circuit RLC, ce qui n'est généralement pas
le cas $\Rightarrow$ le système sera stabilisé
par rétroaction par changement de
valeur de la résistance négative
 $\Rightarrow$ Modélisation plus précise par une
équation de Van Der Pol !!!

Formule de Biot :

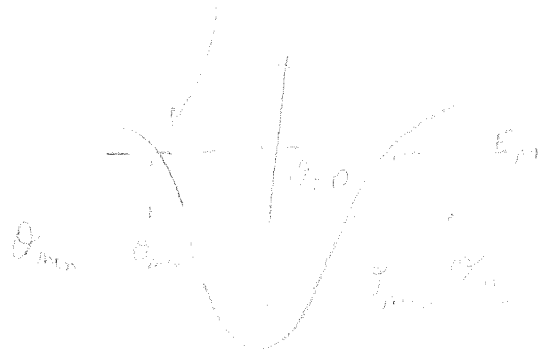
[YouTube : [le pendule simple](#) / Oscillations non harmoniques d'un pendule simple - Formule de Biot.]

Pour de faibles amplitudes, un pendule simple nous a des oscillations non harmoniques.



Pour les faibles angles :

$$E_{pp} = -mgl \cos(\theta)$$



Conditions initiales, à $t=0$:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

On remarque que pour de faibles angles, on a $\sin(\theta) \approx \theta$. N'est-ce toujours exact ?
 Non, car pour $|\theta| < \pi^2$ (approximation pour petits angles)

On a $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$: pendule simple

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Conservation de l'énergie mécanique (modèle sans frottement)

$$E_{\text{m}} = -\frac{1}{2} m g l \cos \theta + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 = -\frac{1}{2} m g l \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2 g}{l} (-\cos \theta_0 + \cos \theta)$$

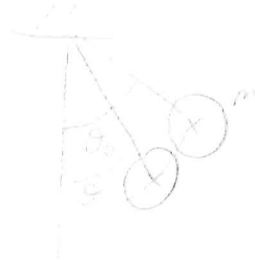
$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

> 0

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{2 g}{l} (-\cos \theta_0 + \cos \theta)$$

la masse du pendule devant

$$\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (-\cos \theta_0 + \cos \theta)}}$$



$$\Rightarrow \int_0^{T/4} dt = \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (-\cos \theta_0 + \cos \theta)}} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)}} = \int_0^{\theta_0} \frac{\sqrt{\frac{l}{2g}} d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

||
T
4

$$\Rightarrow T = \int_0^{\theta_0} 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

$$\Rightarrow T = \int_{\sin^{-1}(0)}^{\sin^{-1}(1) = \pi/2} 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{2 dx \cos(x) \frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)}}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}}$$

changement de variable :

$$\sin X = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$$

$$dx \cos(x) = \frac{d\theta/2}{2} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$$

$$\Rightarrow d\theta = 2 dx \cos(x) \frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)}$$

De plus, $\cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\left(\begin{array}{l} \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \\ \parallel \\ 1 - \sin^2(\theta) \end{array} \right)$

$$\Rightarrow T = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{2 dx \cos(x) \sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta_0/2) \sqrt{2(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(x))}}}{1}$$

$$\Rightarrow T = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{2 dx \cancel{\cos(x)} \cancel{\sin(\theta_0/2)}}{\cos(\theta_0/2) \cancel{\sin(\theta_0/2)} \sqrt{2(1 - \underbrace{\frac{\sin^2(\theta_0/2)}{\sin^2(\theta_0/2)}}_{\sin^2(x)})}}}{\cancel{\cos^2(x)}}$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{dx}{\cos(\theta_0/2) \sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2)}}}{1}$$

$$\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\theta_0/2)}_{k \text{ (constante)}} \sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)}}$$

En faisant un D.L. de $\frac{1}{\sqrt{1-y}} = (1-y)^{-1/2}$ $\left(\begin{array}{l} k \text{ étant petit (et } \sin(x) \text{ également)} \\ k^2 \sin^2(x) \text{ (élévation au carré de termes} \\ \text{petits et multiplication par} \\ \text{d'autres termes petits} \\ \text{permettent de considérer} \\ k^2 \sin^2(x) \text{ et non} \\ \sin(x) \text{ comme petit !!!} \end{array} \right)$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} (k^2 \sin^2(x)) \right) dx$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \frac{(1 - \cos(2x))}{2} \right) dx$$

$$\Rightarrow T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[x + \frac{1}{4} k^2 - \frac{1}{4} k^2 \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} k^2 \right] = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} k^2 \right)$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} h^2 \right)$$

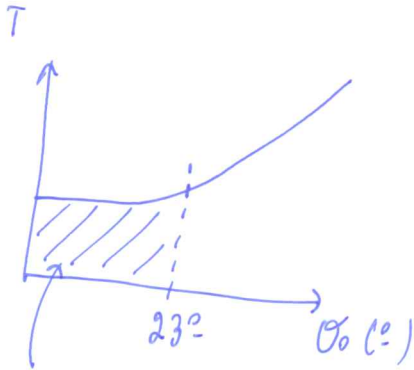
$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\theta_0/2) \right)$$

⚠⚠⚠ IL FAUT AINSI PRENDRE LE D.L. AUTOUR DE 0 DE $\sin^2(\theta_0)$
(ET NON $\sin(\theta_0)$ QUI N'EST PAS FORCÉMENT PETIT !!!)

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_0^2}{4} \right) \right)$$

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

Formule de BORDA valable jusqu'à 23° environ



DOMAINE

DISSONANCE DES

ORDINAIRES (QUELQUE

SOIT θ_0 DANS CET INTERVALLE:

$$T \approx T_0$$

Montage à pont de Wien (oscillateur de Van Der Poll) + montage

dérivateur pour afficher $\frac{dV_S}{dt}$

Dérivateur
RC (actif)

