

Etude Spectrale, Transformée de Fourier.

Appel sur un signal périodique : $f(t) = f(t+T)$,

$$F_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(u) du$$

$$F_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(u) du}$$

1) Décomposition d'une fonction périodique en série de Fourier

décomposition d'une fonction périodique en une somme de sinus.

$$f(t) = f(t+T)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

représente le continu

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$



Valeur moyenne du signal

cos → paire de am toujours pair
sin → paire de km tous le moins

Condition d'orthogonalité :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$$

car on fait une moyenne !!!

alors :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + \sum b_n \sin(nx) \right) \cos(mx) dx = 0$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(mx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx) \cos(mx) dx$$

car que m/n l'intégrale s'annule

0 (car est une fonction nulle sur la période)

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = am \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx$$

$$\text{De plus } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = 1$$



LES a_n, b_n SONT DES
CONSTANTES : ON PEUT LES
SORTIR DE L'INTEGRALE !!!

$$\Rightarrow am = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$\text{De la même manière } bm = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$

⇒ TOUTE FONCTION PERIODIQUE PEUT ÊTRE DÉVELOPPÉE EN UNE SÉRIE DE COS ET DE SIN
DE FRÉQUENCE MULTIPLIÉE DU FONDAMENTAL

Séquence de Fourier :

Pour une fonction périodique :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + (a_n^2 \cos^2(nx) + b_n^2 \sin^2(nx)) dx$$

On utilise les
intégrales
orthogonales :

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{a_0^2}{4} 2\pi + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \frac{1}{2} \times 2\pi$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \Rightarrow \|f\|^2 = \sum |c_n|^2$$

↑
ÉNERGIE MOYENNE d'une fonction

(convergence de Parseval)
ou orthogonales complètes

Definieren wir eine Funktion f auf $\mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x \in [n, n+1) \\ -1/n & x \in [n+1, n+2) \\ 0 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \text{ist nicht mehr}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} dx \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} \Big|_0^{\infty} - \left(\frac{1}{x} \Big|_{-\infty}^0 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0} - \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{-\infty} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{\infty} \right)$$

Wachst

$$b_n = 0$$

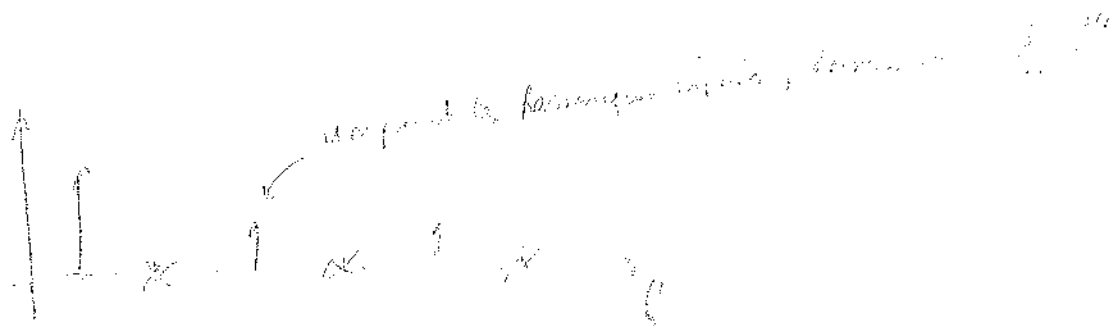
$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$b_n = 0$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^2}$$



Transformée de Fourier : IDÉE RENDRE UN SIGNAL NON PÉRIODIQUE, PÉRIODIQUE
 Pour les signaux non périodiques mais continus!! En rendant artificiellement LA LONGUEUR DE LA PÉRIODE
 En pratique pour de petites durées on approxime périodique $T \rightarrow]-\infty; +\infty[$

et sachant la périodicité rendra une feuille de fonction infinie

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
 $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2j}$

avec $c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Décomposition identique
 si c_n
 est purement
 complexe

Après calcul, on obtient
 $c_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad (n > 0)$
 $c_{-n} = \frac{a_n^2 + j b_n}{2} \quad (n < 0)$
 et $c_0 = \frac{a_0}{2}$
 petite valeurs :
 le spectre devient
 continu)

- 1) On fait tendre la période T vers $+\infty \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$ (les bornes d'intégration tendent vers $-\infty$ et $+\infty$)
 $\frac{1}{T} \rightarrow \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \rightarrow 0$
- 2) On pose $\omega = n\omega_0$ ($\Delta\omega = \omega_0$)

Ainsi $c_n = \left(\frac{1}{T} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \approx F(\omega) \cdot \Delta\omega$

signal spectral . Petit interval car on s'intéresse à c_n

Par identification : CE SONT DONC LES COEFFICIENTS c_n (respectivement a_n et b_n) QUI DÉTERMINENT LE INFORMATION SPECTRALES
 (Transformée de Fourier) DONT UN TRAJET PETIT INTERVAL DE FRÉQUENCE

$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ (Transformée de Fourier inverse)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt$$

Identité fondamentale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi \delta(t-\tau)$

Donc $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$ $(\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)])$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) 2\pi \delta(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi} f(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$$

Propriétés de la fonction dirac :

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \text{ en } \omega=0$$

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t') e^{-j\omega(t'-t_0)} dt' = e^{j\omega t_0} \times 1 \text{ en } \omega=0$$

déphaseur!

$$\int f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = f(t)$$

TRÈS UTILE POUR LE FILTRAGE
LA FONCTION DIRAC EST L'ÉCRÉAN
NEUTRE DE LA CONVOLUTION

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$

$$f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$$

A démontrer:

$$TF[f(t) * g(t)] = TF[f(t)] \times TF[g(t)] \rightarrow \text{Très utile pour le filtrage}$$

$$f(t) * g(t) = \int f(\tau) g(t-\tau) d\tau = f(t)$$

$$TF[f(t) * g(t)] = TF[f(t)] = F(\omega)$$

$$f(t) * g(t-\tau) = \int f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

$$TF[f(t) * g(t-\tau)] = \int \left(\int f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int f(\tau) \left(\int g(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

$$= \int f(\tau) e^{-j\omega \tau} \left(\int g(u) e^{-j\omega u} du \right) d\tau = \int f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \times \int g(u) e^{-j\omega u} du$$

$u = t - \tau$

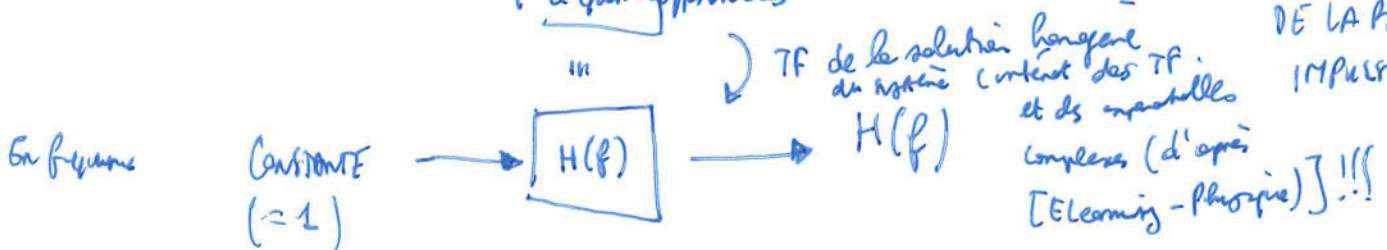
Idee: $s(t) \xrightarrow{TF} S(f) \rightarrow \boxed{\text{FILTRE}} \rightarrow R(f) \xrightarrow{TF^{-1}} r(t)$

$h(t)$ correspond à la réponse à une condition initiale (impulsion très brève à $t=0$)
 c'est-à-dire à la solution homogène du système !!
 (filtre passe bande)

$$(j\omega)_H Y_H(f) + \varepsilon_f \omega Y_H(f) + \omega_0^2 Y_H(f)$$

IL FAUT ASSURÉMENT PREVOIR LA SOLUTION HOMOGENE & NON CEUX FORCÉS CAR IL S'AGIT DE LA REPOSE IMPULSIONNELLE

Relation coefficient de filtre et réponse impulsionnelle:



$\Rightarrow$ UTILISATION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

!!! À LA DISCRÉTISATION DES DÉRIVÉES PAR LA MÉTHODE D'EULER !!!

Quelques transformées de Fourier usuelles:

- $\delta(t)$
- échelon: $u(t)$
- fonction porte: $\Pi(t)$
- exponentielle
- cos / sin
- retard
- intégration
- dérivation: $\frac{dy}{dt} \equiv j\omega Y(f)$



Permet l'analyse systèmes mécaniques, électriques, ... en fréquence

$$\begin{aligned} C u_c(t) &= q(t) \Rightarrow i_c(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \Rightarrow \underline{Z}_C(f) = \frac{1}{C} \frac{U(f)}{j\omega I(f)} = \frac{1}{j\omega C} \\ u_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \Rightarrow \underline{Z}_L(f) = L \frac{U(f)}{I(f)} = j\omega L \end{aligned}$$

Relation dérivées coefficients

